BLAISE PASCAL
PT 2021-2022

DM 8 – à rendre lundi 29 novembre

Correction

Statique des fluides

Remonter un coffre au trésor

Dans tout l'exercice, on se place évidemment dans le référentiel terrestre que l'on considère galiléen.

1 L'axe z étant ascendant, la relation de la statique des fluides s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho g\,, \qquad \text{d'où} \qquad \int_{P_0}^{P(z)} \mathrm{d}P = -\rho g \int_h^z \mathrm{d}z$$

d'où on déduit

$$\boxed{P(z) = P_0 + \rho g(h - z)\,.}$$

2 Par symétrie, les forces de pression exercées sur les faces verticales du coffre se compensent. Lorsque le coffre touche le fond de la mer, seul le couvercle est soumis à la force pressante qui vaut donc

$$\boxed{\vec{F}_\mathrm{p} = -(P_0 + \rho g h) a^2 \vec{e}_z\,,} \qquad \text{car} \qquad h - a \simeq h\,.$$

> ***Attention !*** *Comme le coffre est en contact avec le fond de la mer, la résultante des forces de pression qu'il subit ne peut pas être décrite par la poussée d'Archimède.*

Outre cette force, le système constitué du coffre et du ballon subit également
- son poids
$$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$$
- la résultante des forces de pression exercées sur le ballon, qui peuvent se décrire par la poussée d'Archimède car il est totalement immergé,
$$\vec{\Pi}_\mathrm{b} = \rho V g \vec{e}_z$$
- la force de réaction exercée par le fond de la mer : $\vec{N} = N\vec{e}_z$.

Ainsi, tant que le coffre touche le fond, d'après le théorème de la résultante cinétique,

$$0 = -(P_0 + \rho g h)a^2 - mg + \rho V g + N$$

et le coffre décolle lorsque N s'annule, d'où

$$0 = -(P_0 + \rho g h)a^2 - mg + \rho V_0 g \qquad \text{soit} \qquad \boxed{V_0 = \frac{m}{\rho} + \frac{P_0 a^2}{\rho g} + h a^2\,.}$$

> ***Rappel :*** *Pour établir une condition de décollage de manière rigoureuse, il faut toujours chercher une force de réaction qui s'annule. Ne pas inclure la force de contact dans le bilan des forces et partir sur $\sum \vec{F} = \vec{0}$ conduit au bon résultat mais d'une manière non rigoureuse.*

3 Lors de la remontée, le coffre est totalement immergé donc la force pressante qu'il subit est décrite par la poussée d'Archimède

$$\boxed{\vec{\Pi}_\mathrm{c} = \rho a^3 g \vec{e}_z\,.}$$

> *Dès que c'est possible, c'est-à-dire dès qu'il y a immersion complète, la résultante des forces de pression se calcule via la poussée d'Archimède. C'est beaucoup plus facile que de passer par une sommation des forces pressantes sur chaque face, même si dans le cas particulier d'un cube le calcul est assez simple.*

Les autres forces sont inchangées, si ce n'est la force de réaction qui n'existe plus. Le volume minimal V_{min} du ballon est celui qui permet de maintenir le coffre en équilibre, soit d'après le théorème de la résultante cinétique

$$0 = \rho a^3 g - mg + \rho V_{\text{min}} g \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{V_{\text{min}} = \frac{m}{\rho} - a^3\,.}$$

On constate que $V_{\text{min}} < m/\rho$ alors que $V_0 > m/\rho$, et donc $V_0 > V_{\text{min}}$: si le volume du ballon est suffisant pour décoller le coffre, alors il est suffisant pour le remonter. Il n'est donc pas nécessaire de continuer à gonfler le ballon une fois que le coffre a décollé.

4 D'après le théorème de la résultante cinétique, lorsque de ballon remonte,

$$m\frac{\mathrm{d}(v\vec{e}_z)}{\mathrm{d}t} = -mg\vec{e}_z + \rho(V + a^3)g\vec{e}_z - \lambda v\vec{e}_z$$

ce qui conduit à

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \underbrace{\frac{\lambda}{m}}_{=1/\tau} v = \underbrace{-g + \frac{\rho}{m}(V + a^3)g}_{=A}\,,}$$

qui est bien de la forme demandée.

5 L'équation différentielle s'intègre en

$$v(t) = K\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \tau A \qquad \text{avec} \qquad K = \text{cte}\,.$$

La vitesse initiale du coffre est nulle, donc

$$v(t{=}0) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{expr}}}{=} K + \tau A \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CI}}}{=} 0 \qquad \text{donc} \qquad K = -\tau A$$

et finalement

$$\boxed{v(t) = \tau A\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)\,.}$$

Par intégration, on en déduit

$$z(t) = \tau A t - \tau A \times (-\tau\,\mathrm{e}^{-t/\tau}) + K' \qquad \text{avec} \qquad K' = \text{cte}\,.$$

Le coffre touche le fond à l'instant initial, donc

$$z(t{=}0) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{expr}}}{=} \tau^2 A + K' \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CI}}}{=} 0 \qquad \text{d'où} \qquad K' = -\tau^2 A$$

et on en déduit

$$\boxed{z(t) = \tau A t + \tau^2 A\left(\mathrm{e}^{-t/\tau} - 1\right)\,.}$$

> *Attention à ne pas aller trop vite ! La constante d'intégration n'est pas égale à $z(0)$, tout simplement car la primitive « usuelle » ne s'annule pas. Il faut donc poser explicitement le calcul pour ne pas se tromper. Bien sûr, il est aussi possible de raisonner par séparation de variable :*
>
> $$\int_0^{z(t)} dz = \tau A \int_0^t \left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)\,dt$$
>
> *ce qui donne*
>
> $$z(t) - \cancel{z(0)} = \tau A\left[t + \tau\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\right]_0^t = \tau A\left(t + \tau\,\mathrm{e}^{-t/\tau} - 0 - \tau\right)$$

6 Lorsque le coffre atteint la surface, $z(t{=}\Delta t) = h$, soit

$$\tau A\,\Delta t + \tau^2 A\left(\mathrm{e}^{-\Delta t/\tau} - 1\right) = h$$

et comme $\Delta t \gg \tau$ alors $\mathrm{e}^{-\Delta t/\tau} \ll 1$ donc l'équation précédente de simplifie en

$$\tau A\,\Delta t - \tau^2 A = h$$

d'où on déduit

$$\boxed{\Delta t = \tau + \frac{h}{\tau A} \simeq \frac{h}{\tau A}\,,}$$

car par hypothèse $\tau \ll \Delta t$.

Une autre approche, moins technique et tout aussi valable sur le fond, consiste à dire que puisque $\Delta t \gg \tau$ alors la durée du transitoire est négligeable et donc la vitesse de remontée du coffre est constamment égale à la vitesse limite τA, ce qui conduit au temps de remontée

$$\Delta t = \frac{h}{\tau A}\,.$$

7 Le ballon constitue un système fermé (quantité de matière n = cte) à température constante, donc d'après l'équation d'état des gaz parfaits appliquée en $z = 0$ et en z quelconque on a

$$(P_0 + \rho g h)V_0 = nRT \qquad \text{et} \qquad [P_0 + \rho g(h - z)]\, V(z) = nRT$$

si bien que

$$(P_0 + \rho g h)V_0 = [P_0 + \rho g(h - z)]\, V(z)$$

et ainsi

$$\boxed{V(z) = \frac{P_0 + \rho g h}{P_0 + \rho g h - \rho g z} V_0\,.}$$

Le volume du ballon augmente lorsque z augmente, ce qui est **a priori un avantage** car cela augmente la poussée d'Archimède et tend donc à accélérer le ballon, mais **peut devenir un inconvénient** si le ballon explose alors qu'il est sous l'eau.

8 Calculons la hauteur $z^\star$ à laquelle le ballon explose. D'après ce qui précède,

$$(P_0 + \rho g h)V_0 = [P_0 + \rho g(h - z^\star)]\, V^\star \qquad \text{avec} \qquad V^\star = \frac{4}{3}\pi(2R_0)^3 = 8V_0\,.$$

Ainsi,

$$P_0 + \rho g h = 8(P_0 + \rho g h) - 8\rho g z^\star$$
$$8\rho g z^\star = 7(P_0 + \rho g h)$$
$$\boxed{z^\star = \frac{7}{8}h + \frac{7}{8}\frac{P_0}{\rho g}}$$

Le coffre est remonté à la surface à condition d'avoir $z^\star > h$, soit

$$\frac{7}{8}\frac{P_0}{\rho g} > \frac{h}{8}\,.$$

Pour que le ballon puisse remonter à la surface avant d'exploser, il faut donc que la profondeur soit telle que

$$\boxed{h < h_{\max} = 7\frac{P_0}{\rho g} = 70\,\mathrm{m}\,.}$$