DM 9 – à rendre lundi 6 décembre *Correction*

Théorème de Bernoulli

Alimentation en eau du plateau Est rouennais

A - Étude à débit maximal

1 Le débit volumique de l'installation vaut

$$D_V = \frac{10 \cdot 10^3}{24 \times 3600} = 0{,}12\,\mathrm{m^3 \cdot s^{-1}}$$

d'où on déduit la vitesse débitante

$$\boxed{V = \frac{D_V}{\pi D^2/4} = 0{,}60\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}\,.}$$

Le nombre de Reynolds vaut

$$\boxed{Re = \frac{V D \rho}{\eta} = 3 \cdot 10^5\,,}$$

l'écoulement est donc **turbulent**.

2 Appliquons la relation de Bernoulli entre le bassin de pompage ($P_\mathrm{e} = P_\mathrm{atm}$, $v_\mathrm{e} \simeq 0$ par conservation du débit volumique car le bassin est de grande taille, $z_\mathrm{e} = 6\,\mathrm{m}$) et la sortie de la conduite ($P_\mathrm{s} = P_\mathrm{atm}$, $v_\mathrm{s} = V$, $z_\mathrm{s} = 159\,\mathrm{m}$),

$$D_\mathrm{m}\left[\left(\frac{P_\mathrm{atm}}{\rho} + \frac{V^2}{2} + g z_\mathrm{s}\right) - \left(\frac{P_\mathrm{atm}}{\rho} + 0 + g z_\mathrm{e}\right)\right] = \mathcal{P}_\mathrm{i}$$

ce qui donne

$$\boxed{\mathcal{P}_\mathrm{i} = \rho D_V \left(\frac{V^2}{2} + g(z_\mathrm{s} - z_\mathrm{e})\right) = 1{,}7 \cdot 10^5\,\mathrm{W}\,.}$$

3 La conduite a une rugosité relative $e/D = 1 \cdot 10^{-3}$. Suivant la courbe correspondant à cette rugosité jusqu'à $Re = 3 \cdot 10^5$, on obtient

$$\boxed{\Lambda \simeq 2 \cdot 10^{-2}\,.}$$

4 En appliquant directement le résultat précédent avec $L = 8\,\mathrm{km}$,

$$\boxed{\Delta h = \Lambda \frac{V^2}{2gD} L = 5{,}6\,\mathrm{m}\,.}$$

D'après la relation de Bernoulli généralisée appliquée entre les mêmes points qu'à la question 2,

$$D_\mathrm{m}\left[\left(\frac{P_\mathrm{atm}}{\rho} + \frac{V^2}{2} + g z_\mathrm{s}\right) - \left(\frac{P_\mathrm{atm}}{\rho} + 0 + g z_\mathrm{e}\right)\right] = \mathcal{P}_\mathrm{i} - D_\mathrm{m} g\,\Delta h$$

ce qui donne

$$\boxed{\mathcal{P}_\mathrm{i} = \rho D_V \left(\frac{V^2}{2} + g(z_\mathrm{s} + \Delta h - z_\mathrm{e})\right) = 1{,}8 \cdot 10^5\,\mathrm{W}\,.}$$

Pour compenser les pertes de charge, la station de pompage doit fournir une puissance plus élevée d'environ 5 %.

> *On retrouve clairement sur cette expression le sens physique de la hauteur équivalente à la perte de charge : la puissance indiquée est la même que si l'écoulement était parfait mais que l'eau devait gravir*

> *6 m de dénivellation supplémentaire.*

B - Étude à débit faible

5 D'après la définition du nombre de Reynolds,

$$Re = \frac{V'D\rho}{\eta} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{V' = \frac{\eta\, Re}{D\,\rho} = 4 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}\,.}$$

Le débit volumique correspondant vaut

$$\boxed{D'_V = \frac{\pi D^2}{4} V' = 7{,}8 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^3 \cdot s^{-1}} = 68\,\mathrm{m^3}\ \text{par jour}\,,}$$

ce qui semble bien faible : supposer l'écoulement laminaire dans la conduite est donc peu réaliste ... mais ça donne un calcul intéressant ensuite.

6 La vitesse débitante de l'écoulement vaut

$$\begin{aligned}
V' &= \frac{1}{\pi R^2} \iint v(r) \mathrm{d}S \\
&= \frac{1}{\pi R^2} \iint \frac{\Delta p'}{4\eta L}(R^2 - r^2) r \,\mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\Delta p'}{4\pi\, \eta L R^2} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^R (R^2 r - r^3) \mathrm{d}r \\
&= \frac{\Delta p'}{4\pi\, \eta L R^2} \times 2\pi \times \left[\frac{R^2\, r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^R \\
&= \frac{\Delta p'}{2\eta L R^2} \times \frac{R^4}{4} \\
V' &= \frac{\Delta p'\, R^2}{8\eta L}
\end{aligned}$$

d'où on déduit

$$\boxed{\frac{\Delta p'}{L} = \frac{8\eta V'}{R^2}\,.}$$

Cette chute de pression n'est due ni à un effet de type hydrostatique ou gravitaire, car g n'intervient pas, ni à un effet de type Venturi car la section reste constante. Il ne peut donc s'agir que d'une perte de charge, ce qui est confirmé par le constat que **$\Delta p'$ s'annule si la viscosité η est nulle**.

7 Les pertes de charge sous forme de pression et de hauteur sont reliées par

$$\Delta p' = \rho g\, \Delta h' \qquad \text{soit} \qquad \frac{\Delta h'}{L} = \frac{8\eta\rho g V'}{R^2} = \frac{32\eta\rho g V'}{D^2}$$

> *Ce résultat se (re)trouve simplement par analyse dimensionnelle.*

Par identification avec la relation de Darcy Weisbach,

$$\frac{32\eta V'}{\rho g D^2} = \Lambda \frac{V'^2}{2gD} \qquad \text{d'où} \qquad \Lambda = \frac{64\eta}{V'D\rho}$$

ce qui permet de reconnaître la définition du nombre de Reynolds et d'identifier

$$\boxed{\Lambda = \frac{64}{Re}\,.}$$

8 En appliquant directement le résultat précédent avec $L = 8\,\mathrm{km}$,

$$\boxed{\Delta h' = \Lambda \frac{V'^2}{2gD} L = 4 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}\,.}$$

D'après la relation de Bernoulli généralisée appliquée toujours entre les mêmes points,

$$D_\mathrm{m}\left[\left(\frac{P_\mathrm{atm}}{\rho}+\frac{V'^2}{2}+gz_\mathrm{s}\right)-\left(\frac{P_\mathrm{atm}}{\rho}+0+gz_\mathrm{e}\right)\right]=\mathcal{P}'_\mathrm{i}-D_\mathrm{m}g\,\Delta h'$$

ce qui donne

$$\boxed{\mathcal{P}'_\mathrm{i}=\rho D'_V\left(\frac{V'^2}{2}+g(z_\mathrm{s}+\Delta h'-z_\mathrm{e})\right)=1{,}2\cdot10^3\,\mathrm{W}\,.}$$

> *Bien sûr, il est tout à fait pertinent de négliger $\Delta h'$ devant $z_s - z_e$.*

C - Mode de fonctionnement réel de l'installation

9 La durée de fonctionnement à débit D'_V vaut $\Delta t' = 24$ heures. Le même volume devant être transféré,

$$D_V\,\Delta t = D'_V\,\Delta t' \qquad \text{soit} \qquad \Delta t=\frac{D'_V}{D_V}\Delta t' = 10\,\mathrm{minutes}\,.$$

10 L'énergie requise par les deux solutions vaut respectivement

$$\begin{cases}\mathcal{E}=\mathcal{P}_\mathrm{i}\,\Delta t=1{,}05\cdot10^8\,\mathrm{J}\\ \mathcal{E}'=\mathcal{P}'_\mathrm{i}\,\Delta t'=1{,}07\cdot10^8\,\mathrm{J}\end{cases}$$

Il y a donc peu de différence entre les deux modes de fonctionnement en termes de consommation, l'écart étant essentiellement dû aux erreurs d'arrondi. Plusieurs autres aspects sont donc à considérer, le principal intérêt du mode de fonctionnement à débit maximal étant qu'il permet de transvaser l'eau rapidement, et donc de constituer une réserve au niveau de Franqueville-Saint-Pierre.

D - Étude de la pression le long de la conduite

11 S'il n'y a pas d'écoulement dans la conduite (par exemple si les vannes d'alimentation sont fermées), alors le profil de pression est de type hydrostatique et la pression est nécessairement maximale au point bas de l'installation. Cependant, lorsque l'écoulement est établi, les pertes de charge affectent la pression qui diminue linéairement le long de la conduite, et si ces pertes de charge sont importantes il se peut que le point bas ne soit plus celui de plus haute pression, qui pourrait alors être celui où les pertes de charge sont minimales, donc l'entrée de la conduite.

12 Appliquons de nouveau la relation de Bernoulli, cette fois entre l'entrée et la sortie de la station de pompage (pression P_s, vitesse V égale à la vitesse débitante). Ces deux points sont supposés à la même altitude et on néglige la perte de charge entre eux. Toute la puissance indiquée est reçue par le fluide entre ces deux points, donc la relation de Bernoulli s'écrit

$$\rho D_V\left[\left(\frac{P_\mathrm{s}}{\rho}+\frac{V^2}{2}\right)-\frac{P_\mathrm{atm}}{\rho}\right]=\mathcal{P}_\mathrm{i}$$

ce qui donne

$$\boxed{P_\mathrm{s}=P_\mathrm{atm}-\frac{\rho V^2}{2}+\frac{\mathcal{P}_\mathrm{i}}{D_V}=16\,\mathrm{bar}\,.}$$

13 Les propriétés de l'écoulement sont identiques tout au long de la conduite, donc au bout de $\ell = 500\,\mathrm{m}$, la perte de charge vaut

$$\boxed{\Delta h_\mathrm{b}=\Lambda\frac{V^2}{2gD}\ell=32\,\mathrm{cm}\,.}$$

D'après la relation de Bernoulli entre le bassin de pompage ($z_\mathrm{e} = 6\,\mathrm{m}$) et le point bas ($z_\mathrm{bas} = -43\,\mathrm{m}$),

$$\rho D_V\left[\left(\frac{P_\mathrm{bas}}{\rho}+\frac{V^2}{2}+gz_\mathrm{bas}\right)-\left(\frac{P_\mathrm{atm}}{\rho}+0+gz_\mathrm{e}\right)\right]=\mathcal{P}_\mathrm{i}-\rho D_V g\,\Delta h'$$

ce qui donne

$$\boxed{P_\mathrm{bas}=P_\mathrm{atm}-\frac{\rho V^2}{2}+\frac{\mathcal{P}_\mathrm{i}}{D_V}+\rho g(z_\mathrm{e}-z_\mathrm{bas}-\Delta h')=21\,\mathrm{bar}\,.}$$

C'est donc au point bas de l'installation que la pression est maximale.