



BLAISE PASCAL
PT 2021-2022

DM 9 – à rendre lundi 6 décembre

Théorème de Bernoulli

Vous êtes invités à porter une attention particulière à la rédaction et au soin de votre copie. Les numéros des questions doivent être mis en évidence et les résultats encadrés.

Travailler avec vos cours et TD ouverts est **chaudement recommandé** : un DM est un entraînement, pas une évaluation. En cas de besoin, **n'hésitez pas à me poser des questions**, à la fin d'un cours ou sur le serveur de la classe.



Flasher ce code pour
accéder au corrigé

Alimentation en eau du plateau Est rouennais

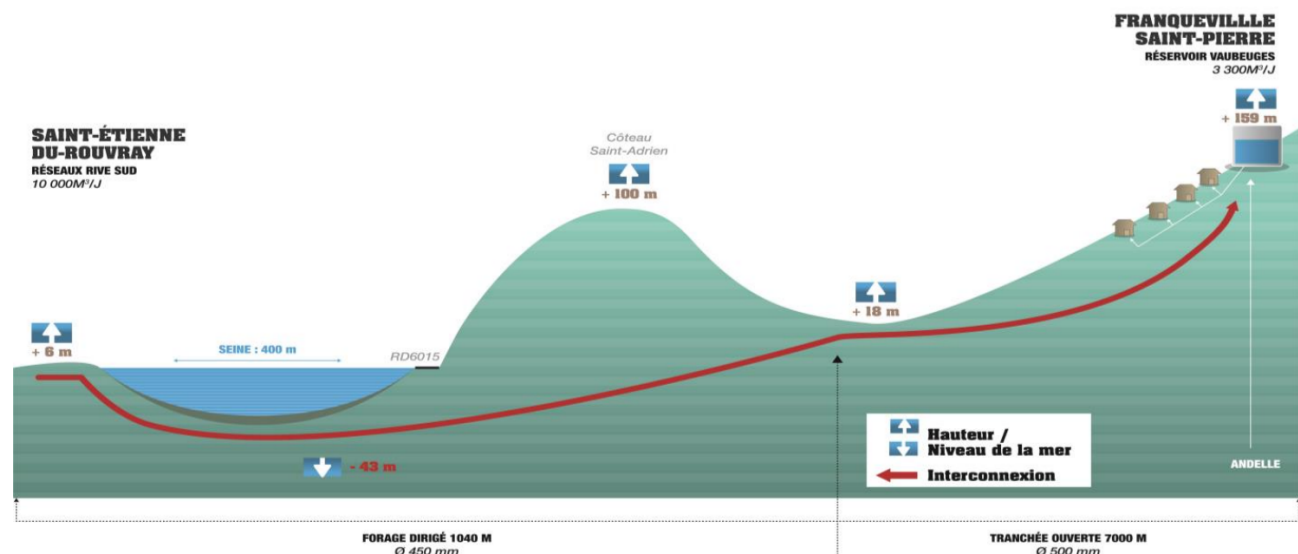
Document 1 : Une canalisation d'eau potable d'un kilomètre tirée sous la Seine

Plus grande régie publique d'eau de France (hors Paris), la Métropole Rouen Normandie est responsable de la production et l'alimentation en eau potable. Suite au développement de l'urbanisation du plateau Est, il était devenu essentiel de sécuriser l'alimentation en eau de ce secteur en apportant un complément aux ressources existantes de Saint-Aubin-Épinay et de la vallée de l'Andelle. Une adduction d'eau potable a ainsi été créée entre l'usine de production d'eau de la Chapelle, à Saint-Étienne-du-Rouvray, et le nouveau réservoir des Vaubeuges à Franqueville-Saint-Pierre.

Pour ce faire, une canalisation d'eau potable longue d'un kilomètre et de 45 cm de diamètre a été tirée sous la Seine samedi 28 octobre 2017, à l'aide d'une foreuse d'une capacité de tirage de 250 tonnes et de grues, avec un passage à 43 m de profondeur sous la Seine et à 130 m sous la falaise du coteau Saint-Adrien. Des chantiers de cette ampleur sont exceptionnels (une fois par an en France), plus souvent destinés au gaz ou au pétrole.

D'un côté de la Seine se situe le réservoir de Franqueville-Saint-Pierre, qui a été créé en 2014 et est alimenté par les forages de la vallée de l'Andelle. De l'autre, les réseaux de production de la Rive Sud disposent d'une marge d'exploitation. Sept kilomètres de distance les séparent. L'objectif de ce chantier exceptionnel est de pouvoir les relier grâce à l'installation de trois équipements :

- ▷ une station de pompage à l'usine de la Chapelle à Saint-Étienne-du-Rouvray ;
- ▷ une canalisation sous-fluviale (longueur 1000 m, diamètre 450 mm) ;
- ▷ une canalisation de liaison côté plateau Est entre Saint-Adrien et le réservoir des Vaubeuges à Franqueville-Saint-Pierre (longueur 7000 m, diamètre 500 mm).



Adapté du dossier de presse de la Métropole Rouen Normandie, 28 octobre 2017

L'objectif de cet exercice est d'estimer l'ordre de grandeur de la puissance nécessaire de la station de pompage construite à Saint-Étienne-du-Rouvray et d'étudier son rendement : vaut-il mieux qu'elle fonctionne longtemps à débit faible ou peu de temps à son débit maximal ? Pour simplifier, on modélisera les deux canalisations sous-fluviale et de liaison par une unique conduite de diamètre $D = 500$ mm et de longueur $L = 8$ km. On suppose de plus que l'eau est pompée dans un bassin de diamètre très supérieur à celui de la conduite, et qu'elle ressort à la pression atmosphérique.

Données : masse volumique $\rho = 1,0 \cdot 10^3$ kg \cdot m $^{-3}$ et viscosité $\eta = 1,0 \cdot 10^{-3}$ Pa \cdot s.

A - Étude à débit maximal

1 - En supposant l'installation dimensionnée pour un débit maximal $D_V = 10\,000$ m 3 par jour, estimer la vitesse débitante de l'écoulement et son nombre de Reynolds. Comment qualifier l'écoulement ?

2 - Par application de la relation de Bernoulli, déterminer la puissance indiquée requise pour compenser la dénivellation en négligeant toute perte de charge et en considérant le débit maximal.

En pratique, la conduite est le siège d'une perte de charge régulière que l'on décrit par l'équation de Darcy-Weisbach,

$$\frac{\Delta h}{L} = \Lambda \frac{V^2}{2gD},$$

avec Λ (lambda majuscule) le coefficient de perte de charge, V la vitesse débitante dans la conduite, et g l'intensité de la pesanteur. Lorsque l'écoulement est turbulent, le coefficient de perte de charge peut s'estimer à partir de l'abaque de Moody représentée figure 1. La hauteur typique de rugosité de la conduite peut être estimée à $e = 0,5$ mm.

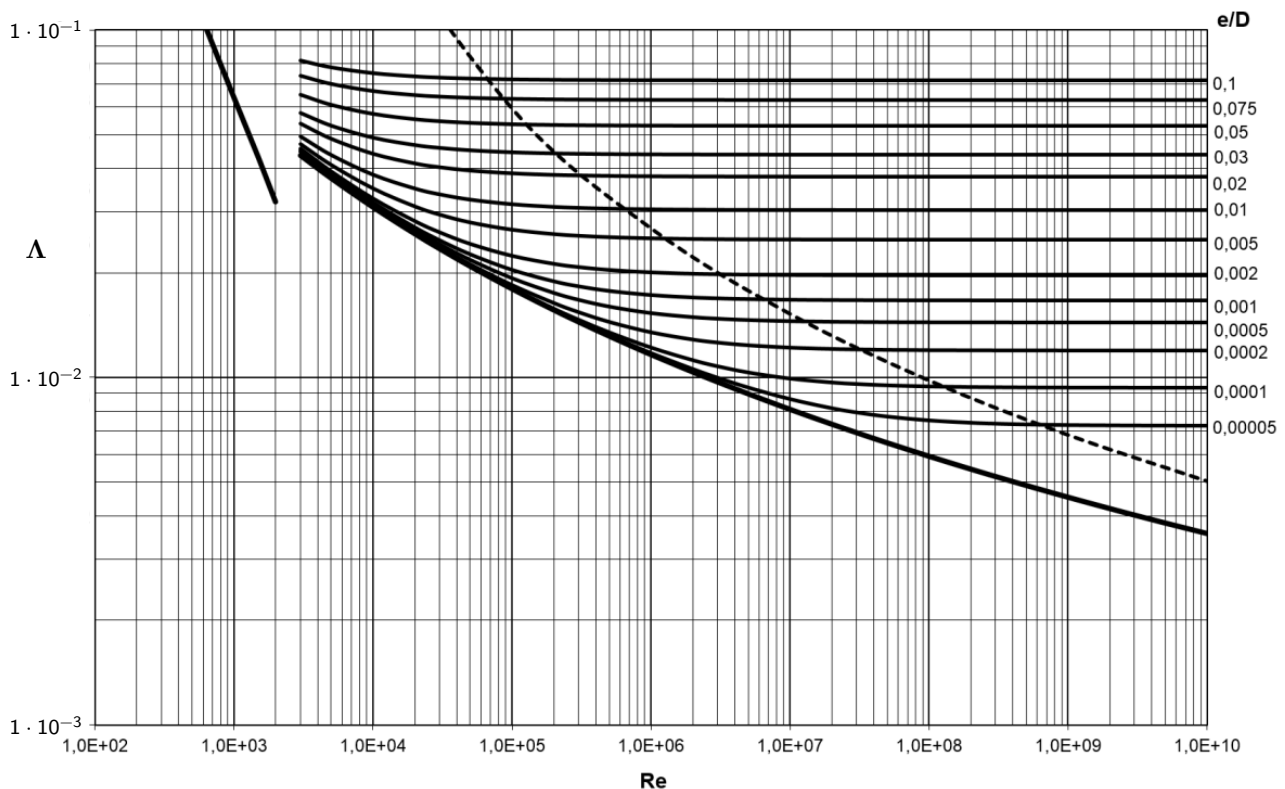


Figure 1 – Diagramme de Moody.

3 - En expliquant le raisonnement, déterminer la valeur numérique de Λ .

4 - Déterminer la perte de charge Δh entre le bassin de pompage et le réservoir sous forme d'une hauteur équivalente. En déduire la puissance indiquée que la station de pompage doit être en mesure de fournir pour garantir le débit voulu malgré les pertes de charge. Comparer au résultat de la question 2.

B - Étude à débit faible

Dans le cas d'un écoulement laminaire ($Re < 2000$), l'équation de Darcy-Weisbach est toujours valable, mais le coefficient de perte de charge peut s'exprimer de façon simple en fonction du nombre de Reynolds. On suppose pour cela que l'écoulement dans la conduite présente un profil de Poiseuille, donné en coordonnées cylindriques par

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta L} (R^2 - r^2).$$

- 5 - Calculer la vitesse débitante V' correspondant à $Re = 2000$ et le débit volumique correspondant D'_V .
- 6 - La vitesse débitante étant imposée, calculer la chute de pression par unité de longueur de conduite $\Delta p'/L$. Justifier qualitativement que cette chute de pression correspond bien à une perte de charge.
- 7 - En déduire que $\Lambda' = 64/Re$, avec Re le nombre de Reynolds de l'écoulement.
- 8 - Déterminer la perte de charge $\Delta h'$ entre le bassin de pompage et le réservoir sous forme d'une hauteur équivalente. En déduire la puissance indiquée \mathcal{P}'_i que la station de pompage doit fournir pour garantir le débit voulu.

C - Mode de fonctionnement réel de l'installation

- 9 - Pendant quelle durée Δt la station de pompage doit elle fonctionner pour transvaser le même volume d'eau à débit maximal D_V que si elle fonctionnait pendant la journée entière avec le débit D'_V ?
- 10 - Comparer l'énergie consommée dans les deux modes d'utilisation. Compte tenu de l'ensemble des valeurs numériques calculées, conclure sur le mode de fonctionnement probable de la station.

D - Étude de la pression le long de la conduite

On cherche enfin à identifier le point de l'installation où la pression est maximale, qui peut être ou bien la sortie de la station de pompage, ou bien le point le plus bas de l'installation que l'on suppose se trouver sous la Seine à 500 m de la station de pompage. On suppose le débit maximal dans la conduite.

- 11 - Expliquer qualitativement pourquoi il peut a priori s'agir de l'un ou l'autre de ces deux points.
- 12 - Calculer la pression P_s de l'eau en sortie de la station de pompage.
- 13 - Déterminer la perte de charge Δh_b au point bas. En déduire la pression P_b en ce point. Conclure.