BLAISE PASCAL
PT 2021-2022

DM 10 – à rendre lundi 13 décembre

Correction

Électrostatique

Champ créé par une distribution à symétrie sphérique

1 Charge totale contenue dans la boule centrale :

$$Q_1 = \iiint \rho(r) \underbrace{r^2 \mathrm{d}r \, \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi}_{\text{volume élémentaire}}$$
$$= \int_0^{R_1} a \, \mathrm{d}r \times \underbrace{\int_0^{\pi} \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \times \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi}_{=4\pi}$$
$$Q_1 = 4\pi a R_1 \,.$$

> *Attention ! Comme la densité de charge n'est pas uniforme, passer par un calcul intégral est* ***indispensable****. Il est clairement faux d'écrire quelque chose comme*
>
> $$\cancel{Q_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^3 \times \frac{a}{R_1^2}}$$

Charge totale de la coquille sphérique :

$$Q_2 = 4\pi R_2^2 \sigma \,.$$

Charge totale contenue dans la couche épaisse extérieure : la densité volumique de charge étant uniforme, la méthode la plus simple consiste à raisonner par soustraction.

$$Q_3 = \frac{4}{3}\pi\rho_0 R_4^3 - \frac{4}{3}\pi\rho_0 R_3^3 = \frac{4}{3}\pi\rho_0 (R_4^3 - R_3^3) \,.$$

> *Bien sûr, un calcul intégral est possible ... mais inutilement compliqué ici.*

La charge totale de cette distribution est donc

$$\boxed{Q_{\mathrm{tot}} = 4\pi a R_1 + 4\pi R_2^2 \sigma + \frac{4}{3}\pi\rho_0 (R_4^3 - R_3^3)}$$

2 Le schéma est dans l'énoncé et la géométrie est simple : on peut se contenter d'y ajouter un point M quelconque sans pour autant le refaire sur la copie.

- **Symétries de la distribution :** tout plan contenant le centre O de la distribution et le point M est plan de symétrie de la distribution. Le champ $\vec{E}(M)$ est inclus dans chacun de ces plans, donc dans leur intersection. Ainsi,

$$\vec{E}(M) = E_r(M)\vec{e}_r \,.$$

- **Invariances de la distribution :** par toute rotation autour de O, donc $E_r(M)$ est indépendant des variables angulaires, soit

$$\vec{E}(M) = E_r(r)\vec{e}_r \,.$$

- **Choix de la surface de Gauss :** évidemment la sphère de rayon r passant par M.
- **Calcul du flux sortant :** immédiat,

$$\oiint_{\mathrm{SG}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = E_r(r) \times 4\pi r^2 \,.$$

- **Calcul de la charge intérieure :** le calcul se mène simplement en généralisant les résultats de la question 1.

▷ pour $r \leq R_1$:
$$Q_{\text{int}} = 4\pi a r$$
▷ pour $R_1 \leq r < R_2$:
$$Q_{\text{int}} = 4\pi a R_1$$
▷ pour $R_2 < r \leq R_3$:
$$Q_{\text{int}} = 4\pi a R_1 + 4\pi\sigma R_2^2$$
▷ pour $R_3 \leq r \leq R_4$:
$$Q_{\text{int}} = 4\pi a R_1 + 4\pi\sigma R_2^2 + \frac{4}{3}\pi\rho_0(r^3 - R_3^3)$$
▷ pour $r \geq R_4$: on se trouve à l'extérieur de la distribution, donc
$$Q_{\text{int}} = Q_{\text{tot}}\,.$$

- **Conclusion :** par application du théorème de Gauss,

▷ pour $r \leq R_1$:
$$\vec{E} = \frac{a}{\varepsilon_0 r}\,\vec{e}_r\,.$$
▷ pour $R_1 \leq r < R_2$:
$$\vec{E} = \frac{aR_1}{\varepsilon_0 r^2}\,\vec{e}_r\,.$$
▷ pour $R_2 < r \leq R_3$:
$$\vec{E} = \frac{aR_1 + \sigma R_2^2}{\varepsilon_0 r^2}\,\vec{e}_r\,.$$
▷ pour $R_3 \leq r \leq R_4$:
$$\vec{E} = \left[\frac{aR_1 + \sigma R_2^2}{\varepsilon_0 r^2} + \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\left(r - \frac{R_3^3}{r^2}\right)\right]\vec{e}_r$$
▷ pour $r \geq R_4$:
$$\vec{E} = \frac{Q_{\text{tot}}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\vec{e}_r\,.$$

3 On constate que le champ électrostatique est continu en tout point des distributions volumiques et à l'interface entre deux distributions volumiques, c'est-à-dire en $r = R_1, R_3$ et R_4. En revanche, il est discontinu de part et d'autre d'une distribution surfacique, c'est-à-dire en $r = R_2$. La discontinuité est donnée par la relation de passage,
$$\vec{E}(r{=}R_2^+) - \vec{E}(r{=}R_2^-) = \frac{aR_1 + \sigma R_2^2}{\varepsilon_0 R_2^2}\,\vec{e}_r - \frac{aR_1}{\varepsilon_0 R_2^2}\,\vec{e}_r = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\vec{e}_r\,.$$

4 Pour $r > R_4$, le champ prend la même expression que s'il était créé par une charge ponctuelle Q_{tot} placée au centre de la distribution. Ce résultat est valable à l'extérieur de n'importe quelle distribution de charge à symétrie sphérique.

Distribution de charge inconnue

5 Soit M un point quelconque de l'espace. Les plans $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ et $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ sont deux plans de symétrie de la distribution, donc le champ électrostatique est radial :
$$\vec{E}(M) = E_r(r, \theta, z)\,\vec{e}_r\,.$$
De plus, la distribution est invariante par rotation autour de l'axe du cylindre et par translation le long de cet axe, le champ électrique ne dépend donc que de la distance r à l'axe. Ainsi,
$$\boxed{\vec{E}(M) = E_r(r)\,\vec{e}_r\,.}$$

6 D'après l'équation de Maxwell-Gauss,
$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\,.$$
Comme $\vec{E}$ est radial et ne dépend que de r, on a à l'intérieur de la distribution
$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{1}{r}\frac{\partial r E_0}{\partial r} = \frac{E_0}{r}\,.$$

> *Le calcul de la dérivée se fait « naturellement » sachant que E_0 est une constante, qui peut donc sortir de la dérivée, et qui ne laisse plus que la dérivée de r par rapport à r, qui est égale à 1.*

Avec l'équation de Maxwell-Gauss, il vient alors

$$\boxed{\rho(r) = \frac{\varepsilon_0 E_0}{r}\,.}$$

Cette expression n'est évidemment valable qu'à l'intérieur de la distribution, et la densité de charge est nulle à l'extérieur.

7 Pour $r < R$,

$$q(r) = \iiint \rho(r)\, r\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}z = \varepsilon_0 E_0 \times \int_0^r \mathrm{d}r \times \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \times \int \mathrm{d}z$$

ce qui donne

$$\boxed{q(r < R) = 2\pi\, h\, \varepsilon_0\, E_0\, r\,.}$$

Pour $r > R$, le calcul de l'intégrale sur r doit être limité à R car il n'y a pas de charge au delà, ce qui donne directement

$$\boxed{q(r > R) = 2\pi\, h\, \varepsilon_0\, E_0\, R\,.}$$

8 Le champ est connu à l'intérieur du cylindre, mais pas à l'extérieur. Il se détermine avec le théorème de Gauss appliqué à un cylindre de rayon $r > R$ et de hauteur h. Compte tenu des questions précédentes, il n'y a quasiment aucun calcul supplémentaire à faire. Le flux s'exprime comme d'habitude,

$$\begin{aligned}
\oiint_{\mathrm{SG}} \overrightarrow{E} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} &= \iint_{\mathrm{bas}} E_r(r)\,\overrightarrow{e}_r \cdot (-\mathrm{d}S\,\overrightarrow{e}_z) + \iint_{\mathrm{lat}} E_r(r)\,\overrightarrow{e}_r \cdot \mathrm{d}S\,\overrightarrow{e}_r + \iint_{\mathrm{haut}} E_r(r)\,\overrightarrow{e}_r \cdot \mathrm{d}S\,\overrightarrow{e}_z \\
&= 0 + E_r(r) \iint_{\mathrm{lat}} \mathrm{d}S + 0 \\
&\boxed{\oiint_{\mathrm{SG}} \overrightarrow{E} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} = 2\pi r\, h\, E_r(r)\,.}
\end{aligned}$$

Avec la charge intérieure calculée à la question précédente, le théorème de Gauss s'écrit

$$2\pi r\, h\, E_r(r) = \frac{2\pi\, h\, \varepsilon_0\, E_0\, R}{\varepsilon_0} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\overrightarrow{E}(r > R) = \frac{R}{r} E_0\, \overrightarrow{e}_r\,.}$$

9 Comme le champ est radial et ne dépend que de r, alors le potentiel également. La définition donne donc

$$E_r(r) = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\,.$$

Pour $r < R$, il vient alors

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = -E_0 \qquad \text{soit} \qquad \int_0^{V(r)} \mathrm{d}V = -E_0 \int_R^r \mathrm{d}r \qquad \text{donc} \qquad \boxed{V(r) = -E_0(r - R)\,.}$$

Pour $r > R$, on a cette fois

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = -\frac{R}{r} E_0 \qquad \text{soit} \qquad \int_0^{V(r)} \mathrm{d}V = -R E_0 \int_R^r \frac{\mathrm{d}r}{r} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{V(r) = -R E_0 \ln \frac{r}{R}\,.}$$