Conduction thermique
Thermodynamique industrielle

Circuit d'eau chaude domestique

CCP MP 2015

II.B - Échangeur thermique

II.4.a Cours Difficile Les notations $d_{k'}$ et d_k désignent respectivement les **débits massiques** de fluide sur la sortie k' et l'entrée k. Les notations $h_{k'}$ et h_k désignent l'**enthalpie massique** à cette entrée et cette sortie. Enfin, la notation p_u désigne la **puissance utile** (puissance indiquée) et p_th la **puissance thermique algébriquement reçues** par l'ensemble des *deux* fluides au sein de l'échangeur.

Qualitativement, les termes $\sum_k d_k h_k$ et $\sum_{k'} d_{k'} h_{k'}$ représentent respectivement l'enthalpie entrant et sortant du volume de contrôle par unité de temps à cause des échanges de matière. Bien que le régime soit permanent, ces enthalpies sont différentes à cause des échanges énergétiques entre le fluide et son environnement à l'intérieur du volume de contrôle.

> *Rappelons que la puissance échangée entre les fluides au sein d'un échangeur double flux est une puissance interne, qui n'apparaît donc pas dans l'écriture du premier principe industriel.*

II.4.b Cours Appliquons le premier principe industriel à la zone active de l'échangeur, qui compte deux entrées de débit respectifs d_e et d_g et deux sorties aux mêmes débits. Il ne compte pas de pièce mobile ($p_u = 0$) et est globalement calorifugé ($p_\mathrm{th} = 0$). Ainsi, avec les notations de la figure 8 de l'énoncé,

$$(d_\mathrm{g} h_2 + d_\mathrm{e} h_4) - (d_\mathrm{g} h_1 + d_\mathrm{e} h_3) = 0 + 0$$
$$d_\mathrm{g}(h_2 - h_1) + d_\mathrm{e}(h_4 - h_3) = 0$$
$$\boxed{d_\mathrm{g} c_\mathrm{g}(T_2 - T_1) + d_\mathrm{e} c_\mathrm{e}(T_4 - T_3) = 0}$$

en utilisant la loi de Joule.

II.4.c D'après la question précédente,

$$\boxed{d_\mathrm{e} = -\frac{d_\mathrm{g} c_\mathrm{g}(T_2 - T_1)}{c_\mathrm{e}(T_4 - T_3)} = 13{,}1\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-1}\,.}$$

II.5.a Cours Le second principe pour un fluide en écoulement au travers d'un système ouvert s'écrit, avec les notations de l'énoncé,

$$\boxed{\sum_{k'\in\text{sortie}} d_{k'} s_{k'} - \sum_{k\in\text{entrées}} d_k s_k = \frac{\delta S_\text{éch}}{\mathrm{d}t} + \frac{\delta S_\text{cr}}{\mathrm{d}t} = \frac{p_\mathrm{th}}{T_\mathrm{ext}} + \sigma\,.}$$

Ici, $s_{k'}$ et s_k désignent les entropies massiques du fluide à la sortie k' et l'entrée k, $\delta S_\text{éch}/\mathrm{d}t = p_\mathrm{th}/T_\mathrm{ext}$ est l'entropie échangée par les deux fluides avec l'extérieur par unité de temps et $\delta S_\mathrm{cr}/\mathrm{d}t = \sigma$ est l'entropie totale créée au sein des deux fluides par unité de temps.

Qualitativement, les termes $\sum_k d_k s_k$ et $\sum_{k'} d_{k'} s_{k'}$ représentent respectivement l'entropie entrant et sortant du volume de contrôle par unité de temps à cause des échanges de matière. Bien que le régime soit permanent, ces entropies sont différentes à cause de la création d'entropie et des échanges thermiques entre le fluide et son environnement à l'intérieur du volume de contrôle.

II.5.b Le second principe écrit ci-dessus appliqué à la zone active de l'échangeur donne

$$d_\mathrm{g}(s_2 - s_1) + d_\mathrm{e}(s_4 - s_3) = 0 + \sigma$$

et en utilisant l'expression fournie de l'enthalpie massique, on obtient

$$\boxed{\sigma = d_\mathrm{g} c_\mathrm{g} \ln \frac{T_2}{T_1} + d_\mathrm{e} c_\mathrm{e} \ln \frac{T_4}{T_3} = 2{,}8\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot s^{-1}}\,.}$$

Trouver $\sigma > 0$ indique que le passage au travers de l'échangeur est irréversible, ce qui n'est pas une surprise étant donné que les deux fluides sont à des températures différentes : il y a donc inévitablement des inhomogénéités de température.

II.C - Isolation thermique d'une canalisation d'eau

II.6 Classique Par intégration sur la surface latérale entre la canalisation et l'eau intérieure,

$$\mathcal{P}_\mathrm{th} = \iint_\text{surf latérale} \vec{\jmath}_Q \cdot \mathrm{d}S \vec{u}_r = \iint_\text{surf latérale} h(T_\mathrm{i} - T_0) \vec{u}_r \cdot \mathrm{d}S \vec{u}_r \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\mathcal{P}_\mathrm{th} = 2\pi\, h\, r_\mathrm{i} L\,(T_\mathrm{i} - T_0)\,.}$$

II.7 Classique L'échange conducto-convectif se fait cette fois entre l'extérieur de la gaine isolante et l'air. Par analogie avec ce qui précède,

$$\boxed{\mathcal{P}_\mathrm{th,isolant} = 2\pi\, h\, r_\mathrm{e} L\,(T_\mathrm{e} - T_0)\,.}$$

II.8.a Raisonnons sur un cylindre creux de longueur L et de rayons r et $r + \mathrm{d}r$ pendant une durée infinitésimale $\mathrm{d}t$. Par la face située en r, il reçoit

$$\delta Q_\mathrm{e} = P_\mathrm{cond}(r)\,\mathrm{d}t\,,$$

et par la face située en $r + \mathrm{d}r$, il cède

$$\delta Q_\mathrm{s} = P_\mathrm{cond}(r + \mathrm{d}r)\,\mathrm{d}t\,.$$

Il s'agit d'un solide indéformable, qui ne reçoit aucun travail. En régime stationnaire, le bilan d'énergie interne s'écrit

$$\mathrm{d}U \underset{\text{1er P}}{\overset{\uparrow}{=}} \delta Q_\mathrm{e} - \delta Q_\mathrm{s} + \cancel{\delta W} \underset{\text{stat}}{\overset{\uparrow}{=}} 0\,.$$

On en déduit

$$P_\mathrm{cond}(r)\,\mathrm{d}t - P_\mathrm{cond}(r + \mathrm{d}r)\,\mathrm{d}t = 0 \qquad \text{donc} \qquad -\mathrm{d}r \frac{\mathrm{d}P_\mathrm{cond}}{\mathrm{d}r} = 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}P_\mathrm{cond}}{\mathrm{d}r} = 0}$$

ce qui est bien le résultat attendu.

II.8.b Raisonnons sur un cylindre creux de rayon interne r quelconque ($r_\mathrm{i} < r < r_\mathrm{e}$) et de rayon externe r_e. Par la face intérieure, il reçoit la puissance $P_\mathrm{cond}(r)$ et par la face externe il cède par définition $\mathcal{P}_\mathrm{th,isolant}$. Avec le même raisonnement qu'à la question précédente, on a

$$\mathrm{d}U \underset{\text{1er P}}{\overset{\uparrow}{=}} P_\mathrm{cond}(r)\,\mathrm{d}t - \mathcal{P}_\mathrm{th,isolant}\,\mathrm{d}t \underset{\text{stat}}{\overset{\uparrow}{=}} 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{P_\mathrm{cond}(r) = P_\mathrm{th,isolant}\,.}$$

> *Le résultat peut aussi se justifier par continuité du flux thermique à l'interface en $r = r_\mathrm{e}$. En revanche, on ne peut pas affirmer sans justifier que $P_{th,isolant}$ est une « condition aux limites », car les mécanismes physiques (conduction pure contre conduction et convection) ne sont pas les mêmes.*

II.8.c La loi de Fourier s'écrit

$$\vec{\jmath}_\mathrm{cond} = -\lambda\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, T = -\lambda \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} \vec{u}_r$$

car la conduction est supposée purement radiale. La puissance $P_\mathrm{cond}(r)$ est la puissance sortant d'un cylindre de rayon r sur lequel $\vec{\jmath}_\mathrm{cond}$ est uniforme, d'où

$$\boxed{P_\mathrm{cond}(r) = -\lambda \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} \times 2\pi r L\,.}$$

II.8.d Ainsi,

$$-\lambda \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} \times 2\pi r L = P_\mathrm{th,isolant} = 2\pi\, h\, r_\mathrm{e} L\,(T_\mathrm{e} - T_0)$$

ce qui donne en simplifiant

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = \frac{hr_\mathrm{e}}{\lambda r}(T_0 - T_\mathrm{e})\,.}$$

II.8.e Procédons par séparation des variables pour intégrer entre r_i et un rayon r quelconque,

$$\int_{T_\mathrm{i}}^{T(r)} \mathrm{d}T = \frac{hr_\mathrm{e}}{\lambda}(T_0 - T_\mathrm{e}) \int_{r_\mathrm{i}}^{r} \frac{\mathrm{d}r}{r}$$

ce qui conduit à

$$\boxed{T(r) = T_\mathrm{i} + \frac{hr_\mathrm{e}}{\lambda}(T_0 - T_\mathrm{e}) \ln \frac{r}{r_\mathrm{i}}\,.}$$

II.8.f Appliquons le résultat précédent en $r = r_\mathrm{e}$,

$$T_\mathrm{e} = T_\mathrm{i} + \frac{hr_\mathrm{e}}{\lambda}(T_0 - T_\mathrm{e}) \ln \frac{r_\mathrm{e}}{r_\mathrm{i}}$$

Il vient alors

$$T_\mathrm{e}\left(1 + \frac{hr_\mathrm{e}}{\lambda}\ln\frac{r_\mathrm{e}}{r_\mathrm{i}}\right) = T_\mathrm{i} + \frac{hr_\mathrm{e}}{\lambda}\ln\frac{r_\mathrm{e}}{r_\mathrm{i}}\, T_0 \qquad -T_0 + T_0$$

$$T_\mathrm{e}\left(1 + \frac{hr_\mathrm{e}}{\lambda}\ln\frac{r_\mathrm{e}}{r_\mathrm{i}}\right) = T_\mathrm{i} - T_0 + \left(1 + \frac{hr_\mathrm{e}}{\lambda}\ln\frac{r_\mathrm{e}}{r_\mathrm{i}}\right) T_0$$

$$\boxed{T_\mathrm{e} = T_0 + \frac{T_\mathrm{i} - T_0}{1 + \dfrac{hr_\mathrm{e}}{\lambda}\ln\dfrac{r_\mathrm{e}}{r_\mathrm{i}}}\,.}$$

> *Le résultat étant donné et le calcul un petit peu astucieux, il faut justifier un minimum la dernière étape du calcul pour que la réponse ne passe pas pour du bluff.*

II.9 D'après les questions II.6 et II.7,

$$\frac{P_\mathrm{th}}{P_\mathrm{th,isolant}} = \frac{2\pi\, h\, r_\mathrm{i} L\,(T_\mathrm{i} - T_0)}{2\pi\, h\, r_\mathrm{e} L\,(T_\mathrm{e} - T_0)} = \frac{r_\mathrm{i}(T_\mathrm{i} - T_0)}{r_\mathrm{e}(T_\mathrm{e} - T_0)}$$

En reprenant la question II.8.f,

$$\frac{T_\mathrm{i} - T_0}{T_\mathrm{e} - T_0} = 1 + \frac{hr_\mathrm{e}}{\lambda}\ln\frac{r_\mathrm{e}}{r_\mathrm{i}}\,,$$

ce qui conduit à

$$\frac{P_\mathrm{th}}{P_\mathrm{th,isolant}} = \frac{r_\mathrm{i}}{r_\mathrm{e}} \times \left(1 + \frac{hr_\mathrm{e}}{\lambda}\ln\frac{r_\mathrm{e}}{r_\mathrm{i}}\right) = \frac{r_\mathrm{i}}{r_\mathrm{e}} + \frac{hr_\mathrm{i}}{\lambda}\ln\frac{r_\mathrm{e}}{r_\mathrm{i}}\,,$$

ce qui correspond bien à la forme donnée par l'énoncé,

$$\boxed{\frac{P_\mathrm{th}}{P_\mathrm{th,isolant}} = \frac{1}{x} + \alpha \ln x \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} x = r_\mathrm{e}/r_\mathrm{i} \\ \alpha = \dfrac{hr_\mathrm{i}}{\lambda} \end{cases}}$$

II.10.a L'isolant est efficace s'il permet de diminuer la puissance thermique cédée à l'air, c'est-à-dire si $P_\mathrm{th}/P_\mathrm{th,isolant} > 1$. Comme $r_\mathrm{e} > r_\mathrm{i}$, seule la partie $x > 1$ des courbes proposées est pertinente. Dans le cas du polyuréthane, on constate que **l'isolation est toujours efficace**.

II.10.b Au contraire, l'isolation au plâtre est inefficace pour des valeurs de x trop faible : il faut atteindre $x = 60$ pour obtenir $P_\mathrm{th}/P_\mathrm{th,isolant} > 1$ avec du plâtre. Cela donnerait $r_\mathrm{e} = 60 r_\mathrm{i}$, soit un diamètre externe de 2,40 m pour une canalisation de rayon 2 cm : **le plâtre est inutilisable** en pratique !

> *Pour $r_\mathrm{e} < 60\, r_i$, on constate un résultat paradoxal : alors que l'épaisseur de matériau augmente, les pertes thermique augmentent également ! En fait, l'épaisseur n'est pas la seule grandeur géométrique*

> *à augmenter : c'est le cas aussi de la surface d'échange entre le plâtre et l'air. Pour les faibles valeurs d'épaisseur, c'est l'augmentation de surface d'échange qui l'emporte.*

II.10.c Posons $f(x) = 1/x + \alpha \ln x$. Alors,

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{x^2} + \alpha\,\frac{1}{x} = \frac{1}{x}\left(\alpha - \frac{1}{x}\right) .$$

La dérivée s'annule en

$$x_\mathrm{m} = \frac{1}{\alpha} = \frac{\lambda}{h r_\mathrm{i}} .$$

II.10.d Par lecture graphique sur la figure 12 de l'énoncé, $x_\mathrm{m} = 4$ d'où

$$\boxed{\lambda = 4 h r_\mathrm{i} = 0{,}24\,\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}} .}$$