

# Conduction thermique

## Thermodynamique industrielle

Vous êtes invités à porter une attention particulière à la rédaction et au soin de votre copie. Les numéros des questions doivent être mis en évidence et les résultats encadrés.

Travailler avec vos cours et TD ouverts est **chaudemment recommandé** : un DM est un entraînement, pas une évaluation. En cas de besoin, **n'hésitez pas à me poser des questions**, à la fin d'un cours ou sur le serveur de la classe.



Flasher ce code pour accéder au corrigé

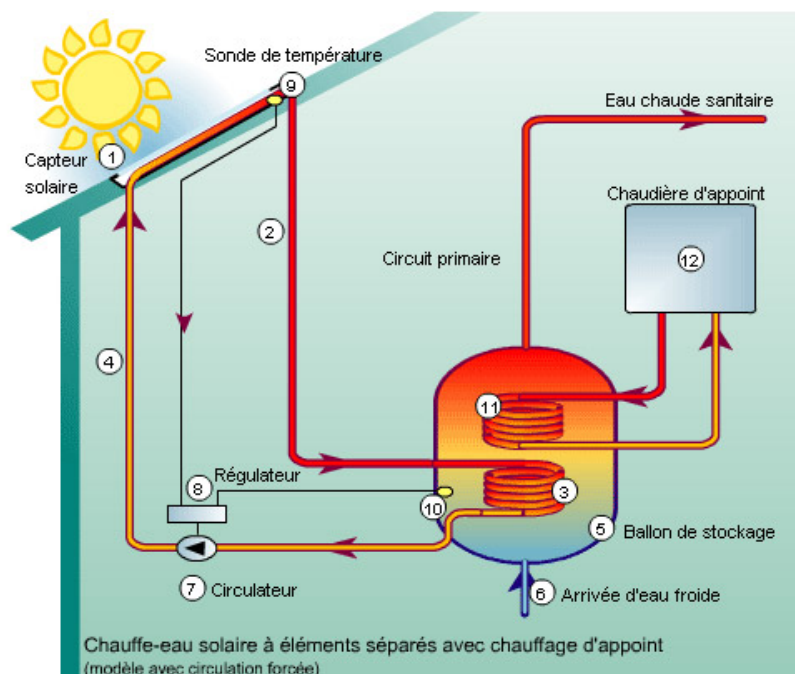
### Circuit d'eau chaude domestique

CCP MP 2015

L'énoncé original ne donne pas vraiment de contexte sur le système étudié, ce que je trouve un peu dommage. Dans l'idée, il pourrait s'agir d'un modèle de chauffe-eau solaire :

- ▷ de l'eau glycolée (le glycol est un additif anti-gel) circulant dans un circuit primaire est chauffée dans un panneau solaire thermique, à ne pas confondre avec un panneau photovoltaïque ;
- ▷ cette eau glycolée est ensuite mise en contact d'eau « pure » à usage sanitaire à l'intérieur d'un ballon d'eau chaude, auquel elle restitue la chaleur emmagasinée.

Une différence notable néanmoins entre ce système et le modèle étudié est la nature de l'échangeur : le sujet modélise un échangeur double flux, alors que qu'un chauffe-eau solaire contient un échangeur simple flux. Le sujet n'en est pas un moins bon entraînement pour autant !



Chauffe eau solaire individuel «CESI» (source : Ademe)

Figure 1 – Schéma de principe d'un chauffe-eau solaire.

## Partie II.B. Echangeur thermique

L'échangeur thermique est un organe fréquemment utilisé dans les installations thermiques. On le trouve dans des pompes à chaleur, des machines à froid ou certains cumulus d'eau chaude.

Le principe d'un échangeur thermique est de permettre le transfert d'énergie thermique entre deux fluides. Dans l'étude menée ici, ce sont :

- l'eau glycolée circulant dans le cumulus d'eau chaude d'une part ;
- l'eau à usage domestique d'une habitation d'autre part.

Ces deux liquides, supposés indilatables et incompressibles, sont mis en contact thermique au sein de l'échangeur via des canalisations dans lesquelles ils se déplacent en sens opposé. C'est dans la zone active de l'échangeur, représentée sur les figures 7 et 8 ci-dessous, que s'opère le transfert thermique entre les deux fluides. Hormis sur leur surface commune, les canalisations sont calorifugées.

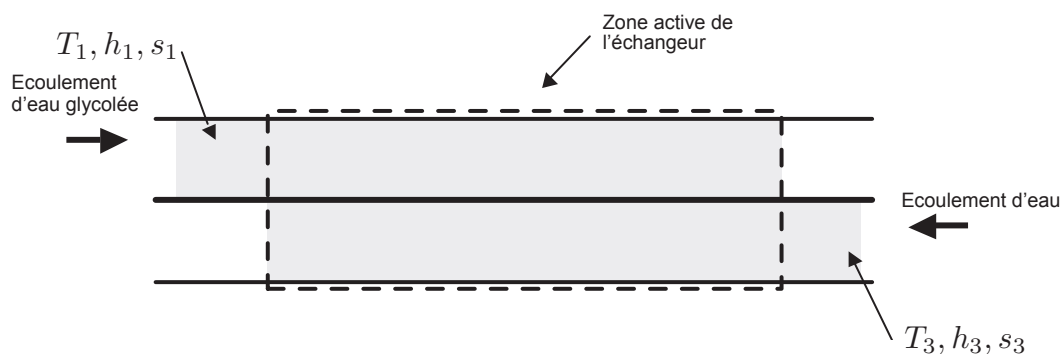


FIGURE 7 – Echangeur à l'instant initial.



FIGURE 8 – Echangeur à l'instant final.

On note  $d_e$  et  $d_g$  respectivement le débit massique d'eau et d'eau glycolée. On note également  $T_i$ ,  $h_i$ ,  $s_i$  respectivement : la température, l'enthalpie massique, l'entropie massique du fluide désigné par  $i \in \{1; 2; 3; 4\}$ , sachant que :

- $i = 1$  fait référence à l'entrée d'eau glycolée dans la zone active.
- $i = 2$  fait référence à la sortie d'eau glycolée de la zone active.
- $i = 3$  fait référence à l'entrée d'eau dans la zone active.
- $i = 4$  fait référence à la sortie d'eau de la zone active.

Les écoulements sont supposés horizontaux et en régime stationnaire. On néglige la variation d'énergie cinétique des fluides lors de leur passage dans l'échangeur.

### II.4. Bilan d'enthalpie

On donne l'expression du premier principe de la thermodynamique pour un système ouvert en écoulement permanent :

$$\sum_{k' \in \text{Sorties}} d_{k'} h_{k'} - \sum_{k \in \text{Entrées}} d_k h_k = p_u + p_{th}, \quad (4)$$

où  $p_u$  désigne la puissance massique échangée entre le système et les parois mobiles qui le délimitent et  $p_{th}$  est la puissance massique échangée entre le système et l'extérieur par transfert thermique.

**II.4.a.** Donner la signification physique des termes du membre de gauche de l'égalité (4).

**II.4.b.** On note  $c_e$  et  $c_g$  respectivement la capacité thermique massique de l'eau et de l'eau glycolée. Déterminer la relation entre :  $c_g$ ,  $c_e$ ,  $d_g$ ,  $d_e$ ,  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  et  $T_4$ . Il est attendu de définir très clairement le système d'étude.

**II.4.c.** On donne :  $c_g = 3,29 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ,  $c_e = 4,18 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ,  $d_g = 10,0 \text{ kg.s}^{-1}$ ,  $T_1 = 10,0 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $T_2 = 15,0 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $T_3 = 15,0 \text{ }^\circ\text{C}$  et  $T_4 = 12,0 \text{ }^\circ\text{C}$ . Calculer numériquement le débit massique d'eau  $d_e$ .

**II.5.** Bilan d'entropie

**II.5.a.** Ecrire une relation analogue à (4) traduisant le second principe de la thermodynamique pour un système ouvert en écoulement permanent et donner la signification physique de chacun des termes intervenant dans cette relation.

**II.5.b.** Déterminer l'expression du taux de création d'entropie par unité de temps dans l'échangeur. Effectuer l'application numérique et indiquer l'origine physique de l'irréversibilité le cas échéant.

Donnée : l'entropie d'un corps indilatable et incompressible, de capacité thermique massique  $c$  et de température  $T$ , est donnée, à une constante additive près, par :  $s(T) = c \ln T + cte$ .

## Partie II.C. Isolation thermique d'une canalisation d'eau

Après avoir transité dans l'échangeur thermique, l'eau alimente le réseau d'une habitation. Afin de limiter les pertes thermiques dans les canalisations, on se propose, dans cette partie, d'étudier quelques solutions d'isolation thermique.

La canalisation est cylindrique, d'axe  $Oz$ , de rayon  $r_i$  et de longueur  $L \gg r_i$ . L'eau y circulant est à la température  $T_i$ . L'objectif de cette partie est de comparer les pertes latérales de la canalisation sans ou avec un isolant.

On adopte le modèle suivant :

- seule la conduction thermique radiale, c'est-à-dire dans une direction perpendiculaire à l'axe  $Oz$ , est prise en compte. On néglige donc la conduction selon l'axe  $Oz$  ;
- la température de l'eau dans la canalisation est supposée uniforme. La conduction radiale s'opère donc pour  $r \geq r_i$  uniquement ;
- l'étude est menée en régime stationnaire ;
- on néglige l'épaisseur de la paroi de la canalisation.

Sans isolant (figure 9, page 14), la canalisation est en contact avec l'air intérieur de l'habitation, de température  $T_0$ .

**II.6.** La densité surfacique de puissance thermique échangée par transfert conducto-convectif au niveau de la surface latérale de la canalisation est donnée par  $\vec{j}_Q = h(T_i - T_0) \vec{u}_r$  (loi de Newton), où  $h$  est une constante dimensionnée appelée coefficient d'échange et  $\vec{u}_r$  le vecteur unitaire radial de la base cylindrique. Exprimer la puissance thermique  $P_{th}$  transférée au niveau de la surface latérale du système.

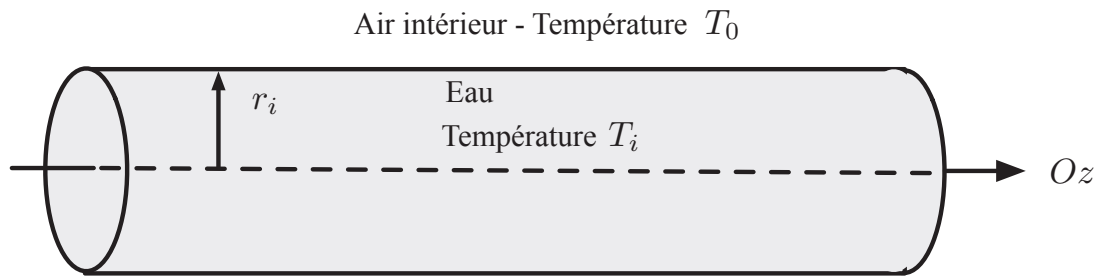


FIGURE 9 – Canalisation sans isolant.

On applique désormais un isolant thermique sur la canalisation précédente. L'isolant possède un rayon intérieur  $r_i$  et un rayon extérieur  $r_e$  (voir figure 10). En un point situé à une distance  $r$  de l'axe  $Oz$  et situé à l'intérieur de l'isolant, c'est-à-dire pour  $r_i \leq r \leq r_e$  en repérage cylindrique, la température est notée  $T(r)$ . On note  $T_e = T(r_e)$  et  $T_i = T(r_i)$ .

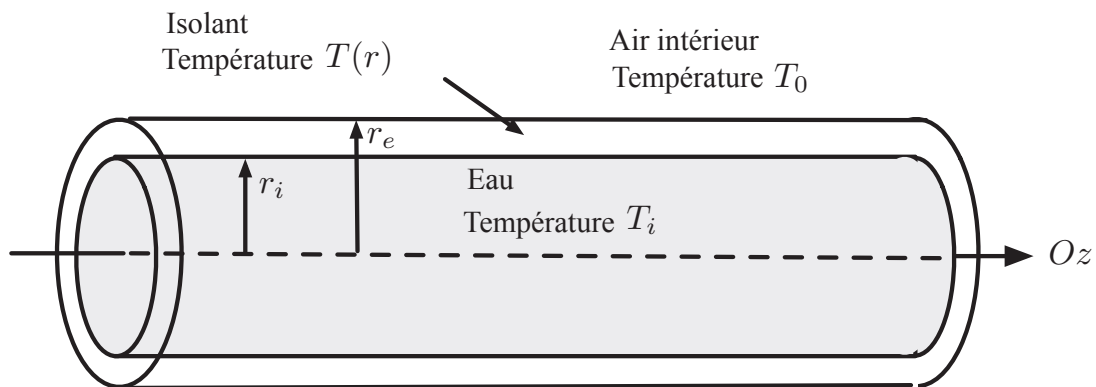


FIGURE 10 – Canalisation avec isolant.

Dans la suite, l'échange conducto-convectif au niveau de la surface intérieure de l'isolant n'est pas pris en compte.

La température de part et d'autre de la surface intérieure de l'isolant est continue :  
 $T(r_i^-) = T(r_i^+) = T_i$ .

**II.7.** On suppose que le coefficient d'échange en  $r = r_e$  est  $h$ . Exprimer la puissance thermique  $P_{th,isolant}$  échangée au niveau de la surface latérale extérieure de l'isolant par conduction-convection en fonction de  $h$ ,  $T_0$ ,  $T_e$ ,  $L$  et  $r_e$ .

**II.8.** On note  $P_{cond}(r)$  la puissance thermique associée au phénomène de conduction thermique dans l'isolant, traversant un cylindre de longueur  $L$  et de rayon  $r$  tel que  $r_i \leq r \leq r_e$ . Nous allons établir et exploiter le lien entre  $P_{th,isolant}$  et  $P_{cond}(r)$ .

**II.8.a.** En effectuant un bilan d'énergie interne sur un cylindre de longueur  $L$ , de rayons interne  $r$  et externe  $r + dr$  tels que  $r_i \leq r < r + dr \leq r_e$  (avec  $dr \ll r$ ), montrer qu'en régime stationnaire  $P_{cond}(r)$  est indépendante de  $r$ , soit :  $\frac{dP_{cond}(r)}{dr} = 0$ .

**II.8.b.** En déduire que :  $P_{cond}(r) = P_{th,isolant}$ .

**II.8.c.** Rappeler l'expression de la loi de Fourier relative à la conduction thermique en exprimant le vecteur densité surfacique de flux de conduction thermique  $\vec{j}_{cond}(r) = j_{cond}(r) \vec{u}_r$  en fonction notamment de la conductivité thermique de l'isolant,  $\lambda$ , supposée uniforme. Exprimer ensuite la puissance thermique associée,  $P_{cond}(r)$ .

Donnée : en repérage cylindrique :  $\vec{\text{grad}}(f(r)) = \frac{df(r)}{dr} \vec{u}_r$ .

**II.8.d.** Dédurre des questions précédentes que :  $\frac{dT}{dr} = \frac{hr_e}{\lambda r} (T_0 - T_e)$ .

**II.8.e.** En déduire l'expression de  $T(r)$ .

**II.8.f.** En déduire que :  $T_e = T_0 + \frac{T_i - T_0}{1 + \frac{hr_e}{\lambda} \ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)}$ .

**II.9.** Montrer que :  $\frac{P_{th}}{P_{th,isolant}} = \frac{1}{x} + \alpha \ln(x)$ , avec  $x = \frac{r_e}{r_i}$  et  $\alpha$  à exprimer en fonction de  $h$ ,  $r_i$  et  $\lambda$ .

On envisage deux solutions d'isolation différentes. On donne pour chacune d'elles :  $h = 3,0 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$  et  $r_i = 2,0 \text{ cm}$ .

— Solution d'isolation n° 1 : l'isolant est du polyuréthane, de conductivité thermique :  $\lambda_1 = 0,025 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ .

Le graphe de  $\frac{1}{x} + \alpha \ln(x)$  en fonction de  $x$  est représenté sur la figure 11 ci-dessous pour la valeur de  $\alpha$  correspondante.

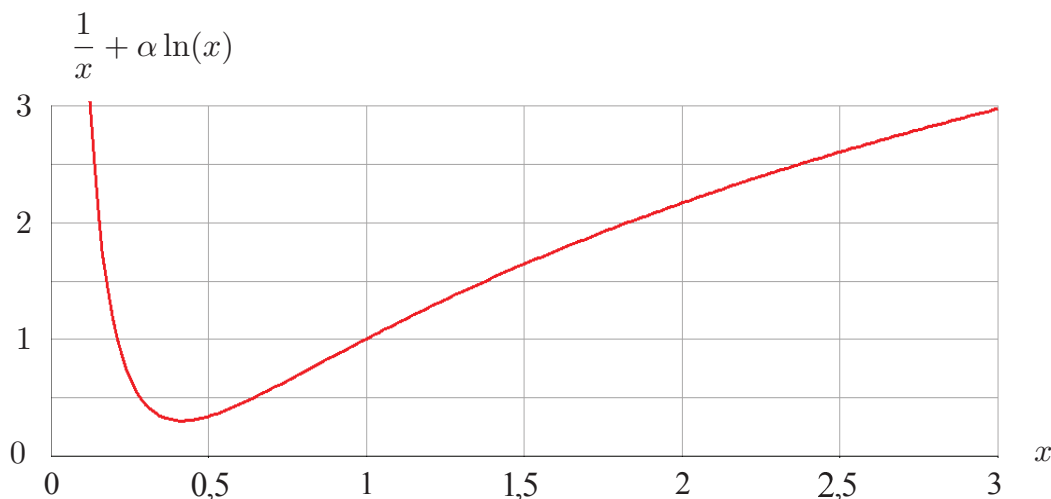


FIGURE 11 – Graphe de la fonction  $\frac{1}{x} + \alpha \ln(x)$  fonction de  $x$  pour la valeur de  $\alpha$  du polyuréthane.

— Solution d'isolation n° 2 : l'isolant est du plâtre, de conductivité thermique  $\lambda_2$ .

Le graphe de  $\frac{1}{x} + \alpha \ln(x)$  en fonction de  $x$  est représenté sur la figure 12 (page 16) pour la valeur de  $\alpha$  correspondante. L'encart représente un agrandissement pour  $0 \leq x \leq 8$ .

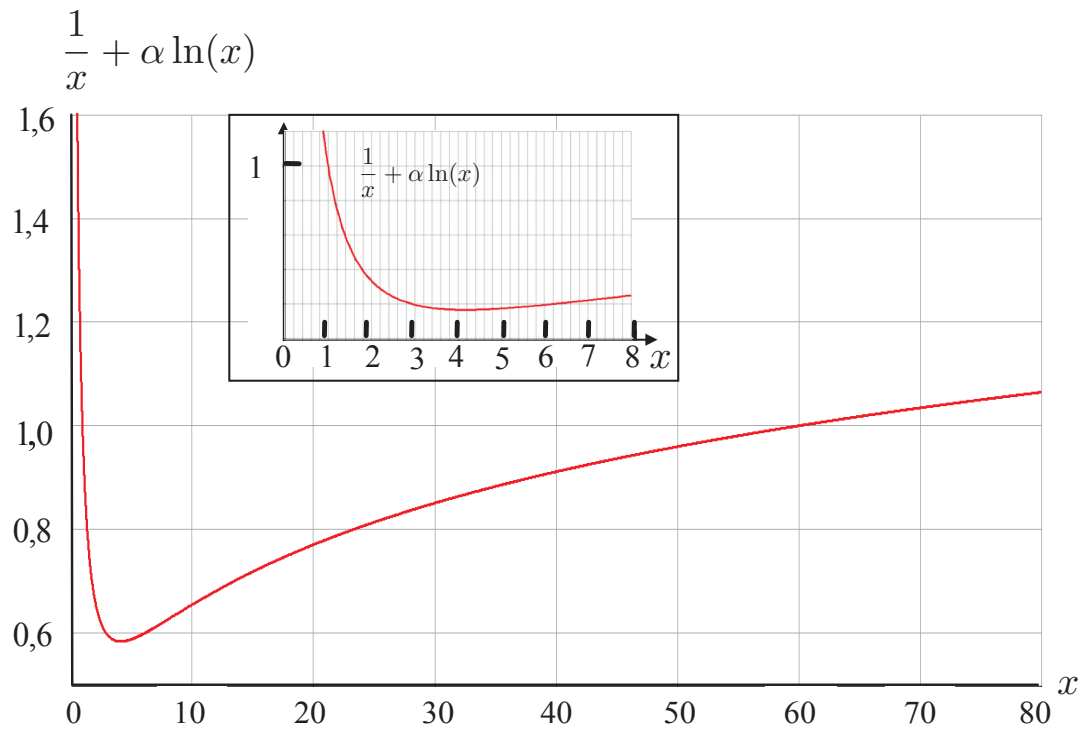


FIGURE 12 – Graphe de la fonction  $\frac{1}{x} + \alpha \ln(x)$  fonction de  $x$  pour la valeur de  $\alpha$  du plâtre.

**II.10.** En vous appuyant sur les graphes des figures 11 et 12, répondre de façon argumentée aux questions suivantes :

**II.10.a.** Est-il toujours efficace d'isoler avec du polyuréthane ?

**II.10.b.** Est-il toujours efficace d'isoler avec du plâtre ? Le cas échéant, déterminer à partir de quelle valeur de  $r_e$  l'isolation au plâtre devient efficace et commenter.

**II.10.c.** Pour quelle valeur  $x_m$  de  $x$  la fonction  $x \rightarrow \frac{1}{x} + \alpha \ln(x)$  admet-elle un minimum ?

**II.10.d.** En déduire la valeur numérique de la conductivité thermique du plâtre  $\lambda_2$ .

**Fin de l'énoncé**