BLAISE PASCAL
PT 2021-2022

DM 14 – à rendre lundi 14 mars — *Correction*

Ondes électromagnétiques

Communication avec un satellite

1 L'onde incidente se propage dans le **sens des z croissants**. Sa polarisation est **rectiligne selon $\vec{e}_x$**. D'après la relation de structure,

$$\underline{\vec{B}} = \vec{e}_z \wedge \frac{\underline{\vec{E}}}{c} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\underline{\vec{B}} = \frac{\underline{E_0}}{c}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kz)}\,\vec{e}_y\,.}$$

2 La force de Lorentz s'écrit

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\wedge\vec{B}\,.$$

En ordre de grandeur,

$$||q\vec{E}|| = q\left|\underline{E_0}\right| \qquad \text{et} \qquad ||q\vec{v}\wedge\vec{B}|| = qv\frac{\left|\underline{E_0}\right|}{c}$$

donc

$$\frac{||q\vec{v}\wedge\vec{B}||}{||q\vec{E}||} = \frac{v}{c}\,.$$

La force magnétique est négligeable si $v \ll c$, c'est-à-dire **si le mouvement de la charge est non relativiste**.

3 Le mouvement est étudié dans un référentiel galiléen. S'agissant de particules microscopiques, seule la force de Lorentz électrique est à prendre en compte. Ainsi, le PFD appliqué à chaque type de porteur donne respectivement

$$\begin{cases} m_\mathrm{c}\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} = e\vec{E} \\ m_\mathrm{e}\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}_\mathrm{e}}{\mathrm{d}t} = -e\vec{E} \end{cases}$$

Le plasma compte deux types de porteurs de charges, implicitement supposés se déplaçant tous à la même vitesse (vitesse d'ensemble). La densité de courant s'écrit donc

$$\vec{j} = ne\vec{v}_\mathrm{c} + n(-e)\vec{v}_\mathrm{e} = ne\left(\vec{v}_\mathrm{c} - \vec{v}_\mathrm{e}\right)\,.$$

On en déduit

$$\frac{\partial\vec{j}}{\partial t} = ne\left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\vec{v}_\mathrm{e}}{\mathrm{d}t}\right) = ne\left(\frac{e}{m_\mathrm{c}}\vec{E} + \frac{e}{m_\mathrm{e}}\vec{E}\right)$$

ce qui donne bien

$$\frac{\partial\vec{j}}{\partial t} = ne^2\left(\frac{1}{m_\mathrm{e}} + \frac{1}{m_\mathrm{c}}\right)\vec{E}\,.$$

> *Le passage des dérivées droites du PFD à la dérivée partielle du résultat manque ici de rigueur ... mais ladite rigueur est difficilement accessible avec le programme de PT. Le « problème » (ou la « solution », selon les points de vue) vient du fait que les vitesses $\vec{v}_\mathrm{e}$ et $\vec{v}_\mathrm{c}$ sont des grandeurs lagrangiennes, attachées à un électron ou un cation particulier, alors que la densité de courant $\vec{j}$ est une grandeur eulérienne, c'est-à-dire un champ dépendant de l'espace et du temps.*

4 Un proton pèse environ $1{,}6\cdot 10^{-27}$ kg, autant qu'un neutron, si bien qu'en supposant que le cation compte dans son noyau une dizaine de protons et de neutron on trouve une masse $m_\mathrm{c} \sim 10^{-26}$ kg. Un électron ne pèse que $9\cdot 10^{-31}$ kg, soit près de 10 000 fois moins. Ainsi, on peut supposer $1/m_\mathrm{c} \ll 1/m_\mathrm{e}$ et écrire l'expression précédente sous la forme

$$\boxed{\frac{\partial\vec{j}}{\partial t} = \frac{ne^2}{m_\mathrm{e}}\vec{E}\,.}$$

Étienne Thibierge, 22 mars 2022, www.etienne-thibierge.fr

5 Comme les cations et les électrons sont de même densité volumique, le plasma est neutre : $\rho = ne - ne = 0$. En utilisant la formule du double rotationnel,

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\,\vec{E}) - \Delta\vec{E} \underset{\substack{\uparrow\\ \mathrm{MG}}}{=} 0 - \Delta\vec{E}$$

Par ailleurs, en utilisant l'équation de Maxwell-Faraday,

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}) \underset{\substack{\uparrow\\ \mathrm{MF}}}{=} -\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) \underset{\substack{\uparrow\\ \mathrm{Schwartz}}}{=} -\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}) \underset{\substack{\uparrow\\ \mathrm{MA}}}{=} -\mu_0\frac{\partial\vec{j}}{\partial t} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}\,.$$

Utiliser la question précédente conduit à

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}) = -\frac{\mu_0 ne^2}{m_\mathrm{e}}\vec{E} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}\,.$$

En identifiant les deux expressions,

$$\Delta\vec{E} = \frac{\mu_0 ne^2}{m_\mathrm{e}}\vec{E} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \qquad \text{soit} \qquad \Delta\vec{E} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\mu_0 c^2 ne^2}{m_\mathrm{e}}\vec{E}$$

ce qui s'écrit encore

$$\boxed{\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \frac{{\omega_\mathrm{p}}^2}{c^2}\vec{E} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \\ \omega_\mathrm{p} = \sqrt{\dfrac{ne^2\mu_0c^2}{m_\mathrm{e}}} = \sqrt{\dfrac{ne^2}{\varepsilon_0 m_\mathrm{e}}} \end{cases}}$$

6 Pour une onde de la forme $\underline{\vec{E}} = \underline{E_0}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kz)}\,\vec{e}_x$,

$$\Delta\underline{\vec{E}} = \frac{\partial^2\underline{\vec{E}}}{\partial z^2} = -k^2\underline{\vec{E}} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2\underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = -\omega^2\underline{\vec{E}}\,.$$

En injectant dans l'équation de propagation,

$$-k^2\underline{\vec{E}} + \frac{\omega^2}{c^2}\underline{\vec{E}} = \frac{{\omega_\mathrm{p}}^2}{c^2}\underline{\vec{E}}$$

soit encore

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2 - {\omega_\mathrm{p}}^2}{c^2}\,.}$$

> *Comme le signe de $\omega^2 - {\omega_\mathrm{p}}^2$ est inconnu, il est impossible d'aller plus loin dans le calcul, et en particulier impossible de passer à une racine. Ainsi, la relation de dispersion concerne k^2.*

7 Pour $\omega < \omega_\mathrm{p}$, la relation de dispersion donne $k^2 < 0$ donc k imaginaire pur,

$$k = \pm\mathrm{i}\sqrt{\frac{{\omega_\mathrm{p}}^2 - \omega^2}{c^2}} = \pm\frac{\mathrm{i}}{\delta}\,.$$

L'onde s'écrit alors

$$\underline{\vec{E}} = \underline{E_0}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{e}^{\pm z/\delta}\,\vec{e}_x\,.$$

L'onde ne pouvant s'amplifier spontanément (ni diverger), seul le signe $-$ est physiquement pertinent. L'onde est amortie exponentiellement sur une distance caractéristique δ, **elle ne peut donc pas traverser l'ionosphère** : la communication avec le satellite est impossible avec des ondes de pulsation $\omega < \omega_\mathrm{p}$. Au contraire, si $\omega > \omega_\mathrm{p}$ alors k est réel,

$$k = \sqrt{\frac{\omega^2 - {\omega_\mathrm{p}}^2}{c^2}}\,,$$

et l'onde conserve sa structure d'OPPH dans l'ionosphère.

8 La fréquence plasma de l'ionosphère est donc de l'ordre de $1{,}6 \cdot 10^6$ Hz, soit 1,6 MHz. Les fréquences utilisées sont très supérieures, ce qui garantit que les ondes traversent l'ionosphère sans dommage.