



Oscillateurs mécaniques

I - Performance phonique d'un double vitrage

A - Modèle à une vitre mobile

Mise en équation

1 **Cours** Le ressort a pour longueur $\ell = x_2 - x_1$, la force qu'il exerce sur la masse m_2 s'écrit donc

$$\vec{F}_{r \rightarrow 2} = -k(x_2 - x_1 - \ell_0) \vec{e}_x.$$

2 **Cours** Étudions le mouvement de la masse m_2 dans le référentiel terrestre, supposé galiléen. Cette masse est soumise à son poids, nécessairement compensé par une force de réaction car le mouvement est horizontal, auxquels s'ajoute les forces \vec{f} et $\vec{F}_{r \rightarrow 2}$. D'après le théorème de la résultante cinétique,

$$m_2 \ddot{x}_2 \vec{e}_x = m_2 \vec{g} + \vec{N} + \vec{f} + \vec{F}$$

ce qui donne en projection sur l'axe (Ox)

$$m_2 \ddot{x}_2 = -\lambda(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k(x_2 - x_1 - \ell_0).$$

3 **Classique** Posons $u_2 = x_2 - \ell_0$, soit $x_2 = u_2 + \ell_0$. La longueur ℓ_0 étant constante, $\dot{x}_2 = \dot{u}_2$ et $\ddot{x}_2 = \ddot{u}_2$. L'équation du mouvement se réécrit donc

$$\begin{aligned} m_2 \ddot{u}_2 &= -\lambda(\dot{u}_2 - \dot{x}_1) - k(x_2 - \ell_0 - x_1 - \ell_0) \\ m_2 \ddot{u}_2 + \lambda \dot{u}_2 + k u_2 &= \lambda \dot{x}_1 + k x_1 \\ \ddot{u}_2 + \frac{\lambda}{m_2} \dot{u}_2 + \frac{k}{m_2} u_2 &= \frac{\lambda}{m_2} \dot{x}_1 + \frac{k}{m_2} x_1 \\ \ddot{u}_2 + \frac{\omega_0}{Q} \dot{u}_2 + \omega_0^2 u_2 &= \frac{\omega_0}{Q} \dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 \end{aligned}$$

en identifiant la **pulsation propre** ω_0 et le **facteur de qualité** Q ,

$$\begin{cases} \omega_0^2 = \frac{k}{m_2} \\ \frac{\omega_0}{Q} = \frac{\lambda}{m_2} \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_2}} \\ Q = \frac{m_2}{\lambda} \omega_0 = \frac{m_2}{\lambda} \sqrt{\frac{k}{m_2}} \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_2}} \\ Q = \frac{\sqrt{k m_2}}{\lambda} \end{cases}$$

Étude en régime sinusoïdal forcé

4 **Cours** En écriture complexe, dériver équivaut à multiplier par $j\omega$. L'équation différentielle devient donc

$$\begin{aligned} (j\omega)^2 \underline{u}_2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q} \underline{u}_2 + \omega_0^2 \underline{u}_2 &= j\omega \frac{\omega_0}{Q} \underline{x}_1 + \omega_0^2 \underline{x}_1 \\ \left(-\omega^2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2\right) \underline{u}_2 &= \left(j\omega \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2\right) \underline{x}_1 \end{aligned}$$

Divisons l'ensemble de l'égalité par ω_0^2 ,

$$\left(-\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{j\omega}{Q\omega_0} + 1\right) \underline{u}_2 = \left(\frac{j\omega}{Q\omega_0} + 1\right) \underline{x}_1,$$

ce qui permet d'identifier la pulsation réduite

$$\left(1 - x^2 + \frac{jx}{Q}\right) u_2 = \left(1 + \frac{jx}{Q}\right) x_1$$

et enfin la fonction de transfert

$$H = \frac{u_2}{x_1} = \frac{1 + \frac{jx}{Q}}{1 - x^2 + \frac{jx}{Q}}$$

On constate que le filtrage réalisé par le double vitrage s'apparente à un filtrage passe-bas d'ordre 2, ce qui se devine plus ou moins sur la courbe de l'énoncé, au moins pour la nature passe-bas du filtrage (les basses fréquences sont moins atténuées que les hautes).

5 Pour les grandes valeurs du facteur de qualité, on observe un pic caractéristique d'un phénomène de **résonance**. Ce phénomène de résonance peut expliquer la présence du puits d'atténuation : à sa fréquence f_p , le mouvement de vibration de la deuxième vitre est d'amplitude maximale, donc l'onde sonore qu'elle réémet en vibrant est d'amplitude maximale elle aussi. L'atténuation des sons extérieurs est donc minimale à cette fréquence. Pour que ce phénomène puisse avoir lieu, la présence du « ressort » constitué par la lame d'air de la vitre est indispensable ... or il n'y a pas un tel ressort équivalent dans le cas d'un simple vitrage, qui est un unique solide, et donc pas de résonance possible.

6 **Classique** Le carré du module de la fonction de transfert s'écrit

$$|H|^2 = \frac{1 + \frac{x^2}{Q^2}}{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}$$

Posons

$$\mathcal{D}(x) = (1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}$$

Le module est maximal lorsque le dénominateur \mathcal{D} est minimal. Sa dérivée s'écrit

$$\frac{d\mathcal{D}}{dx} = 2 \times (1 - x^2) \times (-2x) + \frac{2x}{Q^2} = -4x(1 - x^2) + \frac{2x}{Q^2}$$

Le minimum est atteint lorsque la dérivée s'annule, pour

$$-4x(1 - x^2) + \frac{2x}{Q^2} = 0 \quad \text{soit} \quad -2(1 - x^2) + \frac{1}{Q^2} = 0 \quad \text{et} \quad 1 - x^2 = \frac{1}{2Q^2}$$

ce qui donne

$$x_p = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \quad \text{si} \quad Q > \frac{1}{\sqrt{2}},$$

la condition sur Q permettant à la racine d'être définie.

7 Si $Q \gg 1$, on peut approximer $x_p \simeq 1$, soit

$$f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} \simeq \frac{\omega_0}{2\pi} \quad \text{donc} \quad f_p \simeq \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m_2}}$$

B - Prise en compte de la deuxième vitre

Fréquence du puits d'atténuation

8 **Classique** Étudions le mouvement de chacune des masses dans le référentiel terrestre, considéré galiléen.

• **Équation du mouvement pour m_1** : la masse est soumise à son poids et à une force de réaction qui se compensent, ainsi qu'à la force exercée par le ressort, qui s'écrit

$$\vec{F}_{r \rightarrow 1} = -k(x_2 - x_1 - \ell_0)(-\vec{e}_x) = +k(x_2 - x_1 - \ell_0)\vec{e}_x$$

D'après le théorème de la résultante cinétique projeté sur \vec{e}_x ,

$$m_1 \ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1 - \ell_0)$$

Attention au signe dans la force de rappel exercée par le ressort ! Je recommande de retenir son expression sous la forme

$$\vec{F}_r = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_{\text{sortant}}$$

avec \vec{u}_{sortant} le vecteur unitaire sortant du ressort, c'est-à-dire orienté du ressort vers le système qui subit la force, qui s'identifie ici à \vec{e}_x .

- **Équation du mouvement pour m_2** : la mise en équation est identique à celle de la question 2, en négligeant désormais l'amortissement visqueux, ce qui donne comme équation différentielle

$$m_2\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1 - \ell_0).$$

- 9 Récrivons les deux équations différentielles précédentes en divisant par les masses,

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = \frac{k}{m_1}(x_2 - x_1 - \ell_0) \\ \ddot{x}_2 = -\frac{k}{m_2}(x_2 - x_1 - \ell_0) \end{cases}$$

et soustrayons-les,

$$\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = -\frac{k}{m_2}(x_2 - x_1 - \ell_0) - \frac{k}{m_1}(x_2 - x_1 - \ell_0).$$

On peut alors identifier $\ell = x_2 - x_1$ et $\ddot{\ell} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1$,

$$\ddot{\ell} = -k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)(\ell - \ell_0),$$

soit sous forme canonique

$$\ddot{\ell} + k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\ell = k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\ell_0.$$

On reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique dont on identifie la pulsation propre

$$\omega_0 = \sqrt{k\left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1}\right)}.$$

- 10 **Difficile** D'après le modèle précédent, la fréquence du puits d'atténuation acoustique vaudrait

$$f_p = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{S}\left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}\right)}$$

en notant S la surface d'une vitre et donc $m = \mu S$ sa masse. Le modèle utilisé permet de **retrouver les dépendances en μ_1 et μ_2** ... mais il manque l'influence de l'**épaisseur de la lame d'air**, et donne une **dépendance en la surface** qui n'a pas lieu d'être. En réalité, ces dépendances sont masquées par la constante de raideur du ressort apparent formé par la lame d'air, dont l'expression est inconnue : la comparaison des deux expressions de la fréquence du puits d'atténuation permet de comprendre que $k/S \propto 1/e$ soit $k \propto S/e$.

Supprimer le puits d'atténuation

- 11 Les deux vitres ont la même épaisseur, et donc la même masse surfacique. La fréquence du puits d'atténuation se simplifie donc en

$$f_p = 61\sqrt{\frac{1}{e} \times \frac{2}{\mu}}$$

On en déduit alors

$$f_p^2 = 3721 \times \frac{2}{e\mu}$$

et ainsi

$$\mu = \frac{7442}{e f_p^2} = 9,9 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2}.$$

12 Dans le cas du double vitrage dissymétrique, la vitre 1 est deux fois plus épaisse que la vitre 2, donc sa masse surfacique deux fois plus élevée : $\mu_1 = 2\mu_2 = 2\mu$. On en déduit la fréquence du puits d'atténuation,

$$f'_p = 61 \sqrt{\frac{1}{e} \left(\frac{1}{2\mu} + \frac{1}{\mu} \right)} \quad \text{soit} \quad f'_p = 61 \sqrt{\frac{3}{2\mu e}} = 215 \text{ Hz.}$$

13 **Difficile** Le puits d'atténuation devrait donc être légèrement décalé vers la gauche, mais en tout état de cause rester visible sur la figure! Une première hypothèse pour expliquer qu'il ne le soit plus serait que l'écart de masse (surfacique) entre les deux vitrages aurait également une influence sur le facteur de qualité, et donc la profondeur du puits d'atténuation ... ceci étant, cette explication semble assez peu convaincante car il s'agirait d'un sacré concours de circonstance pour que le puits d'atténuation disparaisse complètement! Ainsi, je pencherais plutôt pour une erreur (voire une arnaque ...) de la part du constructeur ayant fourni cette figure.

II - Tube circulaire à deux compartiments

oral banque PT

Dans tout l'exercice, on raisonne sur le piston, qui est soumis à quatre forces :

- ▷ son poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg \cos \theta \vec{e}_r + mg \sin \theta \vec{e}_\theta$;
- ▷ la force pressante exercée par le compartiment de gauche : $\vec{F}_g = P_g S \vec{e}_\theta$;
- ▷ la force pressante exercée par le compartiment de droite : $\vec{F}_d = -P_d S \vec{e}_\theta$;
- ▷ la force de réaction du tube, dont la composante orthoradiale est forcément nulle car le piston se déplace sans frottement : $\vec{N} = N \vec{e}_r$.

14 **Difficile** Appliquons le théorème de la résultante cinétique au piston, supposé en équilibre. En projection sur \vec{e}_θ , on obtient

$$mg \sin \theta + P_g S - P_d S = 0$$

Pour relier les pressions à l'angle θ , exprimons le volume des deux compartiments :

$$V_g = \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) aS \quad \text{et} \quad V_d = \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) aS$$

Rappelons l'interprétation géométrique d'un angle en radian : un arc de cercle de rayon R compris entre les angles θ_1 et $\theta_2 > \theta_1$ a une longueur $\ell = R(\theta_2 - \theta_1)$. Sachant qu'un quart de cercle a pour longueur angulaire $\pi/2$ (donc longueur $R\pi/2 = 2\pi R/4$), on en déduit que les deux compartiments ont pour longueur angulaire respective $\pi/2 + \theta$ et $\pi/2 - \theta$.

Avec l'équation d'état, la condition d'équilibre s'écrit donc

$$mg \sin \theta + \frac{nRT}{\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) aS} S - \frac{nRT}{\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) aS} S = 0$$

ce que l'on peut réécrire

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{nRT}{mga} \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} - \theta} - \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \theta} \right) \\ &= \frac{nRT}{mga} \frac{\frac{\pi}{2} + \theta - \frac{\pi}{2} + \theta}{\frac{\pi^2}{4} - \theta^2} \\ &= \frac{8nRT}{\pi^2 mga} \frac{\theta}{1 - \frac{4\theta^2}{\pi^2}} \end{aligned}$$

ce qui permet bien d'identifier

$$\sin \theta = \frac{T}{T_c} \frac{\theta}{1 - 4\theta^2/\pi^2} \quad \text{avec} \quad T_c = \frac{\pi^2 mga}{8nR}.$$

15 **Difficile** On constate que $\theta = 0$ est toujours position d'équilibre, indépendamment de la température. Cherchons s'il en existe d'autres, en se limitant aux valeurs $\theta > 0$: par symétrie, si θ est position d'équilibre, alors $-\theta$

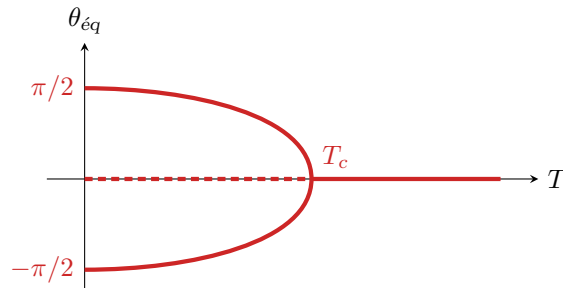
l'est aussi. D'après l'inégalité de convexité du sinus, $\sin \theta \leq \theta$: s'il existe des positions d'équilibre $\theta \neq 0$, cela impose d'avoir

$$\frac{T/T_c}{1 - 4\theta^2/\pi^2} < 1.$$

Comme $1 - 4\theta^2/\pi^2 < 1$, cette condition ne peut être vérifiée que si $T < T_c$. Ainsi,

- ▷ si $T < T_c$, il existe trois positions d'équilibre : $\theta = 0$ (qualitativement instable) et $\theta = \pm\theta^*$ (qualitativement stable);
- ▷ si $T > T_c$, seule la position d'équilibre $\theta = 0$ demeure, et elle est stable.

Pour aller plus loin : On peut représenter la situation sur le diagramme ci-dessous, appelé diagramme de bifurcation. Dans le cas présent, on parle de bifurcation fourche supercritique.



La limite basse température peut être étudiée par un développement limité : comme $T \ll T_c$, alors $\sin \theta \ll 1$, ce qui autorise un développement limité. L'équation auto-cohérente devient

$$\left(1 - \frac{4\theta^2}{\pi^2}\right) \sin \theta = \frac{T}{T_c} \theta \quad \text{soit} \quad \left(1 - \frac{4\theta^2}{\pi^2}\right) \theta = \frac{T}{T_c} \theta \rightarrow 0$$

ce qui impose

$$\left(1 - \frac{4\theta^2}{\pi^2}\right) = 0 \quad \text{d'où} \quad \theta = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Ces considérations sont bien sûr très au delà du niveau normalement attendu en PT!

16 Le piston se trouve initialement sur sa position d'équilibre stable $\theta = 0$, jusqu'à ce que la température atteigne T_c . À ce moment là, la position d'équilibre $\theta = 0$ devient instable. Sous l'effet d'une fluctuation interne au système, le piston finit par être déséquilibré et se retrouve sur l'une des deux positions d'équilibre $\pm\theta$, sur laquelle il reste jusqu'à ce que T atteigne T_2 ... mais attention, comme cette position dépend de la température, le piston continue à se déplacer en la suivant.

17 Le mouvement du piston étant circulaire, on a

$$\overrightarrow{OM} = a \vec{e}_r \quad \rightsquigarrow \quad \vec{v} = a\dot{\theta} \vec{e}_\theta \quad \rightsquigarrow \quad \vec{a} = -a\dot{\theta}^2 \vec{e}_r + a\ddot{\theta} \vec{e}_\theta.$$

Comme il n'y a pas de frottement, les forces ont la même expression qu'à la question 14. Le théorème de la résultante cinétique projeté sur \vec{e}_θ donne alors

$$ma\ddot{\theta} = mg \sin \theta + \frac{nRT}{(\frac{\pi}{2} + \theta) aS} S - \frac{nRT}{(\frac{\pi}{2} - \theta) aS} S$$

Les mêmes calculs qu'à la question 14 donnent alors

$$ma\ddot{\theta} = mg \sin \theta + \frac{2nRT}{\pi a} \left(\frac{1}{1 + 2\theta/\pi} - \frac{1}{1 - 2\theta/\pi} \right).$$

On se place au voisinage immédiat de la position d'équilibre $\theta_{\text{éq}} = 0$, ce qui permet de supposer $\theta \ll 1$ et de faire des développements limités. On a alors

$$ma\ddot{\theta} = mg\theta - \frac{8nRT}{\pi^2 a} \theta$$

qui se réécrit aussi

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{8nRT}{\pi^2 a^2 m} - \frac{g}{a} \right) \theta = 0.$$

On reconnaît alors l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre

$$\omega_0^2 = \frac{8nRT}{\pi^2 a^2 m} - \frac{g}{a} = \frac{T}{T_c} \frac{g}{a} - \frac{g}{a} \quad \text{d'où} \quad \omega_0 = \sqrt{\left(\frac{T}{T_c} - 1\right) \frac{g}{a}}.$$