



BLAISE PASCAL
PT 2022-2023

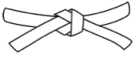



DM 1 – à rendre mercredi 7 septembre

Oscillateurs mécaniques

Travailler avec vos cours et TD ouverts est **chaudement recommandé** : un DM est un entraînement, pas une évaluation. En cas de besoin, **n'hésitez pas à me poser des questions**, à la fin d'un cours ou sur le serveur de la classe.



Flasher ce code pour accéder au corrigé

Ceinture		Travail à réaliser
	Ceinture blanche	Questions 1 à 7 uniquement.
	Ceinture jaune	Questions 1 à 10 uniquement.
	Ceinture rouge	Partie I en entier.
	Ceinture noire	Parties I et II en entier.

Pour le moment, choisissez librement votre ceinture en fonction de ce que vous estimez être votre niveau de compétence en physique.

- ▷ Ceinture blanche : 3/2 qui rencontrait d'importantes difficultés en PTSI (p.ex. 5 à 10 derniers du concours blanc), cette ceinture ne concerne que très peu d'étudiants ;
- ▷ Ceinture jaune : 3/2 s'estimant fragile à moyen (p.ex. deuxième moitié de classe au concours blanc), 5/2 qui rencontrait d'importantes difficultés en 3/2 ;
- ▷ Ceinture rouge : 3/2 s'estimant moyen à plutôt à l'aise (p.ex. première moitié de classe au concours blanc), 5/2 s'estimant fragile à moyen en 3/2 ;
- ▷ Ceinture noire : 3/2 très à l'aise (p.ex. top 5 ou top 10 au concours blanc), 5/2 s'estimant moyen à très l'aise en 3/2.

I - Performance phonique d'un double vitrage

La performance énergétique des bâtiments est l'une des principales préoccupations en architecture contemporaine, du fait de ses conséquences directes financières et sur l'environnement. Toutefois, le confort des occupants d'un bâtiment ne doit pas être négligé pour autant. C'est pourquoi l'isolation phonique, c'est-à-dire l'atténuation des bruits issus de l'environnement, est également un enjeu important à prendre en compte en construction ou en rénovation.

Le double vitrage est désormais de rigueur pour des raisons d'efficacité thermique, mais il s'avère plutôt moins performant sur le plan phonique qu'un simple vitrage, comme le montre la figure 1, qui compare l'isolation acoustique d'un simple et d'un double vitrage. En particulier, la courbe d'isolation phonique du double vitrage fait apparaître un minimum marqué à la fréquence de 250 Hz, absent sur celle du simple vitrage, appelé *puits d'atténuation*, ce qui est particulièrement gênant car cette fréquence correspond au trafic routier à vitesse moyenne. Ce sujet a pour objectif de comprendre la cause de ce puits d'atténuation, puis d'analyser une potentielle solution technique permettant de l'éviter. Le second minimum autour de 3,15 kHz relève de phénomènes différents et ne sera pas étudié ici.

A - Modèle à une vitre mobile

Mise en équation

Modélisons le double vitrage par deux masses m_1 et m_2 , représentant chacune une vitre, se déplaçant à une dimension le long d'un axe (Ox), comme schématisé figure 2. On s'intéresse au mouvement de la masse m_2 . Sous l'effet des ondes sonores, l'air compris entre les deux lames de verre se comprime et se dilate : on le modélise par un ressort, dont la longueur à vide ℓ_0 correspond à l'épaisseur de la lame d'air et dont la raideur k est reliée à des paramètres géométriques et thermodynamiques non explicités ici. Les phénomènes dissipatifs (liaison avec le bâti notamment) sont modélisés par une force d'amortissement visqueux de constante λ : la masse m_2 subit une force

$$\vec{f} = -\lambda(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)\vec{e}_x.$$

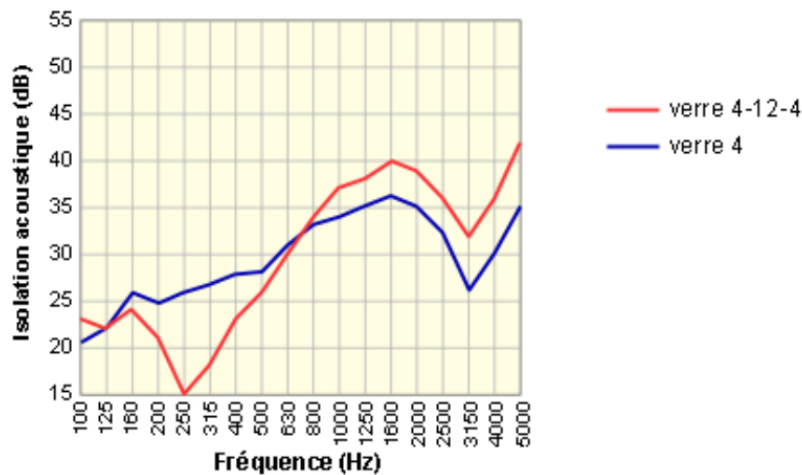


Figure 1 – Isolation acoustique en fonction de la fréquence pour un simple et double vitrage. La courbe bleue correspond à un simple vitrage d'épaisseur 4 mm, la courbe rouge à un double vitrage composé de deux vitres de 4 mm séparées d'une lame d'air épaisse de 12 mm. Figure extraite de la fiche technique double vitrage du constructeur MULTIGLASS. Version couleur sur le site de la classe.

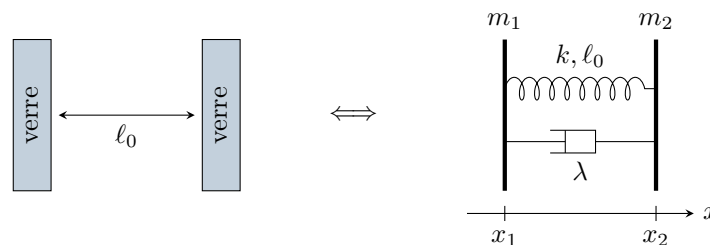


Figure 2 – Modélisation du double vitrage.

- 1 - Exprimer la force $\vec{F}_{r \rightarrow 2}$ exercée par le ressort sur la masse m_2 en fonction de k , ℓ_0 , x_1 et x_2 .
- 2 - Établir l'équation différentielle vérifiée par x_2 .
- 3 - On pose $u_2 = x_2 - \ell_0$. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par u_2 s'écrit

$$\ddot{u}_2 + \frac{\omega_0}{Q} \dot{u}_2 + \omega_0^2 u_2 = \frac{\omega_0}{Q} \dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1.$$

Nommer les paramètres ω_0 et Q et donner leur expression en fonction des paramètres du problème.

Étude en régime sinusoïdal forcé

Le mouvement de la masse m_1 est imposé par l'onde sonore incidente, supposé de la forme

$$x_1(t) = A \cos(\omega t).$$

Pour étudier l'équation précédente en régime sinusoïdal forcé, on utilise le formalisme complexe : à une grandeur réelle $u_2(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi)$ est associée la grandeur complexe $\underline{u}_2 = \underline{U}_0 e^{j\omega t}$ ($j^2 = -1$) où $\underline{U}_0 = U_0 e^{j\varphi}$ est l'amplitude complexe.

- 4 - Partant de l'équation différentielle, établir l'expression de la fonction de transfert harmonique du double vitrage, définie par $\underline{H} = \underline{u}_2 / \underline{x}_1$, en fonction de la pulsation réduite $x = \omega / \omega_0$ et Q .
- 5 - La figure 3 représente l'évolution de $|\underline{H}|$ en fonction de x pour différentes valeurs de Q . Comment se nomme le phénomène physique à l'origine du maximum observé pour les grandes valeurs du facteur de qualité ? En déduire une explication qualitative au puits d'atténuation (minimum d'isolation acoustique) observé pour le double vitrage sur la figure 1. Pourquoi ce minimum ne s'observe-t-il pas sur le simple vitrage ?

On souhaite déterminer la fréquence f_p caractéristique du phénomène, dans la limite $Q \gg 1$ pertinente dans notre contexte. On admet que dans cette limite le numérateur de $|\underline{H}|$ varie peu autour de $f = f_p$, si bien qu'il suffit de raisonner sur le dénominateur.

- 6 - Établir la valeur x_p pour laquelle $|\underline{H}|$ est maximal en fonction de Q . Identifier une condition sur Q pour que ce maximum existe.

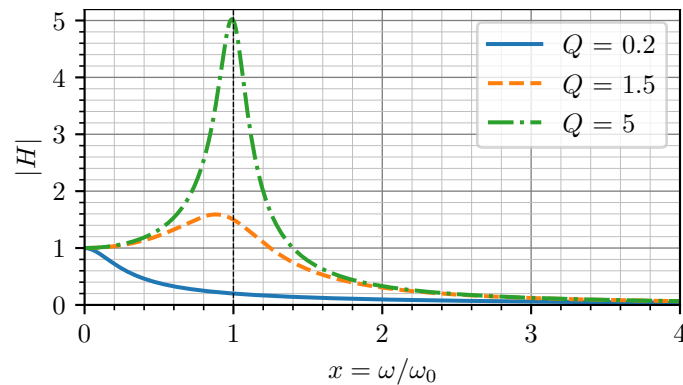


Figure 3 – Courbe de gain en fonction de la fréquence.

7 - Dans la limite $Q \gg 1$, en déduire que le puits d'atténuation du double vitrage se trouve à la fréquence

$$f_p \simeq \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m_2}}.$$

B - Prise en compte de la deuxième vitre

Fréquence du puits d'atténuation

Le modèle précédent permet de comprendre qualitativement le minimum d'atténuation phonique du double vitrage, mais ne permet guère d'aller au delà : il ne prend en compte que la masse m_2 de la seconde vitre, alors que celle de la première vitre doit aussi intervenir, car sa mise en mouvement par l'onde sonore en dépend. Il s'agit donc maintenant de déterminer la pulsation propre du système à *deux* masses évoluant librement, le mouvement de la masse m_1 n'étant plus connu a priori. La question 7 montre que l'amortissement ne joue pas de rôle sur cette pulsation : on le néglige désormais, afin d'alléger les calculs.

8 - Établir un système de deux équations différentielles couplées portant sur les positions x_1 et x_2 des deux masses.

9 - En déduire une équation différentielle découplée portant sur la longueur $\ell = x_2 - x_1$ du ressort. Identifier la pulsation propre des oscillations de ce système.

Les guides techniques d'aide au choix du vitrage indiquent que la fréquence du puits d'atténuation acoustique d'un double vitrage (exprimée en hertz) est donnée par

$$f_p = 61 \sqrt{\frac{1}{e} \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right)}$$

avec e l'épaisseur de la lame d'air séparant les vitres (exprimée en mètres) et μ_1 et μ_2 les masses surfaciques des vitrages (exprimées en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-2}$).

10 - Commenter cette expression en lien avec le modèle étudié : que permet-il d'expliquer ? certains effets échappent-ils à ce modèle ?

Supprimer le puits d'atténuation ?

La figure 4 représente la courbe d'isolation acoustique de deux doubles vitrages dans lesquels l'épaisseur des vitres diffère.

11 - En expliquant le raisonnement, déterminer la masse surfacique d'une vitre d'épaisseur 4 mm.

12 - En déduire la fréquence f'_p à laquelle se trouve le puits d'atténuation du vitrage dissymétrique.

13 - Cet effet suffit-il à expliquer la différence entre les deux courbes de la figure 4 ? Proposer une interprétation complémentaire plausible.

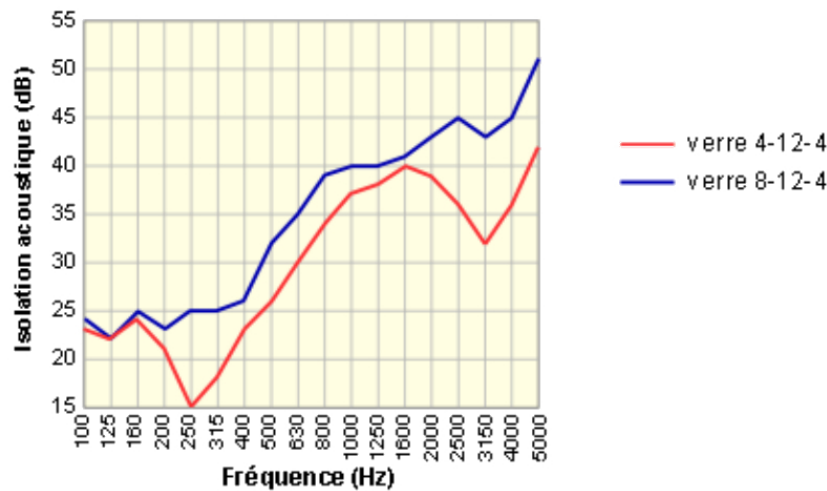


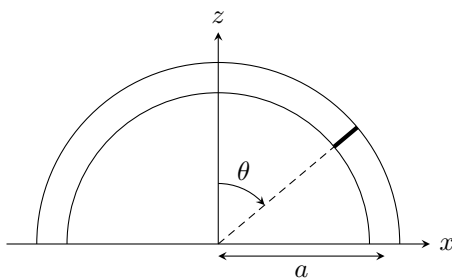
Figure 4 – Isolation acoustique en fonction de la fréquence pour deux doubles vitrages. La courbe rouge correspond à un double vitrage symétrique, constitué de deux vitres de même épaisseur 4 mm séparées d'une lame d'air de 12 mm. La courbe bleue est celle d'un double vitrage dissymétrique, dans lequel l'une des vitres a une épaisseur de 8 mm. Figure extraite de la fiche technique double vitrage du constructeur MULTIGLASS. Version couleur sur le site de la classe.

II - Tube circulaire à deux compartiments

oral banque PT

Cet exercice est un exemple de ce qui peut être demandé à l'oral de la banque PT. Par rapport au niveau moyen des exercices posés, il est plutôt difficile sans être excessif. Il ne fait appel qu'à des notions de thermodynamique et de mécanique du programme de PTSI.

À titre d'indication (qui pourrait être donnée oralement par l'examinateur), on pourrait « rappeler » au candidat que le volume d'un tore de rayon moyen a et de section S vaut $2\pi aS$, ou lui suggérer de s'interroger sur la longueur d'un arc de cercle de rayon a et d'angle d'ouverture α .



Considérons un tube de section S , en forme de demi-cercle de rayon moyen a . Au sein du tube se trouve un piston d'épaisseur négligeable se déplaçant sans frottement, qui le sépare en deux compartiments étanches. Chaque compartiment est rempli d'une même quantité n d'un gaz parfait à la température T .

14 - Montrer que les positions d'équilibre du piston vérifient

$$\sin \theta = \frac{T}{T_c} \frac{\theta}{1 - 4\theta^2/\pi},$$

Déterminer la température critique T_c .

15 - Analyser les positions d'équilibre en distinguant les cas $T \geq T_c$.

16 - Étudier qualitativement le passage de $T_1 > T_c$ à $T_2 < T_c$.

17 - Déterminer la pulsation des oscillations autour de la position d'équilibre pour $T > T_c$.

Donnée : $\forall x \geq 0, \sin x \leq x$.