DM 5 – à rendre lundi 17 octobre *Correction*

Transitoires thermiques

I - Vider une casserole par ébullition

1 Par définition,

$$C_4H_{10(g)} + \frac{13}{2}O_{2(g)} = 4\,CO_{2(g)} + 5\,H_2O_{(l)}\,.$$

D'après la loi de Hess,

$$\boxed{\Delta_r H^\circ = 4\,\Delta_f H^\circ(CO_2) + 5\,\Delta_f H^\circ(H_2O) - \Delta_f H^\circ(C_4H_{10}) - \frac{13}{2}\times 0 = -2656\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}\,.}$$

2 Lorsque n mol de butane sont consommées, l'avancement final de la transformation est également égal à n mol. La transformation étant isotherme, le bilan d'enthalpie du butane au cours de cette transformation s'écrit

$$\Delta H \underset{\text{1er P}}{\underset{\uparrow}{=}} -Q_{\text{lib}} \underset{\text{transf}}{\underset{\uparrow}{=}} n\,\Delta_r H^\circ \qquad \text{soit} \qquad \boxed{Q_{\text{lib}} = -n\,\Delta_r H^\circ\,.}$$

3 Raisonnons sur une durée infinitésimale $\mathrm{d}t$. La masse de butane libérée par la bouteille vaut $D_m\,\mathrm{d}t$, ce qui correspond à une quantité de matière $\mathrm{d}n = D_m\,\mathrm{d}t/M_{C_4H_{10}}$. Supposons que la totalité de cette quantité de matière est consommée par la réaction de combustion. D'après la question précédente, cela libère une énergie

$$\delta Q_{\text{lib}} = -\frac{D_m\,\mathrm{d}t}{M_{C_4H_{10}}}\,\Delta_r H^\circ$$

La casserole ne recevant que la moitié de cette énergie,

$$\mathcal{P}_0\,\mathrm{d}t = \frac{\delta Q_{\text{lib}}}{2} = -\frac{D_m\,\mathrm{d}t}{M_{C_4H_{10}}}\,\Delta_r H^\circ \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\mathcal{P}_0 = -\frac{D_m}{2\,M_{C_4H_{10}}}\Delta_r H^\circ = 3\,\mathrm{kW}\,.}$$

> *Considérer une transformation infinitésimale n'est pas indispensable : il est possible également de raisonner sur une transformation finie, ou directement avec les puissances. Par ailleurs, le lien avec le débit massique doit être clairement expliqué et ne pas ressembler à une arnaque.*

4 Puisque $T > T_0$, alors c'est bien sûr la casserole qui cède de la chaleur à l'air environnant ... et dans ce cas $\mathcal{P}_a > 0$: on en déduit que $\mathcal{P}_a$ est la **puissance cédée**.

> *Autre présentation du raisonnement (même si je ne conseille pas forcément de le rédiger comme ça) : on connaît physiquement le sens réel de l'échange, de la casserole vers l'air, et avec l'expression donnée $\mathcal{P}_a > 0$, c'est donc que le sens réel est le même que le sens conventionnel, d'où $\mathcal{P}_a$ puissance cédée par la casserole.*

5 Procédons à un bilan enthalpique instantané pour la casserole d'eau au cours de la phase de chauffage.

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} \underset{\text{1er P}}{\underset{\uparrow}{=}} \mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_a \underset{\text{Joule}}{\underset{\uparrow}{=}} mc\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} \qquad \text{donc} \qquad mc\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_0 - \alpha(T - T_0)$$

et finalement

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \frac{\alpha}{mc}T = \frac{\mathcal{P}_0}{mc} + \frac{\alpha}{mc}T_0\,.}$$

> *Raisonner sur une transformation infinitésimale est, comme à chaque fois, équivalent à raisonner directement sur les puissances.*

6 La température atteinte en régime permanent, c'est-à-dire la solution particulière de cette équation différentielle, doit être supérieure à la température d'ébullition de l'eau,

$$\boxed{T_\infty = \frac{\mathcal{P}_0}{\alpha} + T_0 > T_{\text{éb}}\,.}$$

Numériquement, $T_\infty = 520\,°\text{C} > 100\,°\text{C}$: le critère est bel et bien atteint !

> *Penser aux tests de vraisemblance pour valider l'expression : T_∞ est d'autant plus élevée que la puissance de chauffe $\mathcal{P}_0$ l'est, et si on ne chauffe pas ($\mathcal{P}_0 = 0$) alors la température de l'eau finira par atteindre celle de l'air.*

7 L'équation différentielle précédente se résout en

$$T(t) = T_\infty + A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} \qquad \text{avec} \qquad \tau = \frac{mc}{\alpha}\,.$$

À l'instant initial, on peut supposer l'eau en équilibre thermique avec l'air, donc

$$T(t{=}0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{=} T_0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sol}}}{=} T_\infty + A$$

et ainsi

$$T(t) = (T_0 - T_\infty)\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + T_\infty = \frac{\mathcal{P}_0}{\alpha}(1 - e^{-t/\tau}) + T_0\,.$$

La phase de préchauffage dure de l'instant $t = 0$ jusqu'à $t = t_1$ tel que $T = T_{\text{vap}}$. Ainsi,

$$T_{\text{vap}} = (T_0 - T_\infty)\,\mathrm{e}^{-t_1/\tau} + T_\infty \qquad \text{soit} \qquad \mathrm{e}^{-t_1/\tau} = \frac{T_{\text{vap}} - T_\infty}{T_0 - T_\infty}$$

ce qui conduit à

$$\boxed{t_1 = \tau \ln \frac{T_0 - T_\infty}{T_{\text{éb}} - T_\infty} = -\tau \ln\left(1 - \frac{\alpha}{\mathcal{P}_0}(T_{\text{éb}} - T_0)\right) = 121\,\text{s}\,.}$$

> *La condition initiale n'est (volontairement) pas donnée : c'est à vous de faire une hypothèse raisonnable.*
>
> *Penser à tester la vraisemblance du résultat : en grands cuiseurs de pâtes que vous êtes, vous ne pouvez pas écrire sans réagir que le temps nécessaire pour faire bouillir une casserole d'eau est de quelques secondes ou de quelques années !!*

8 Procédons à un bilan d'enthalpie infinitésimal au cours de la phase d'ébullition, où la température de l'eau est constante égale à $T_{\text{éb}}$. La masse qui s'évapore entre t et $t + \mathrm{d}t$ est reliée à la variation de hauteur d'eau par

$$\mathrm{d}m = -\rho\, S\, \mathrm{d}\ell$$

car $\mathrm{d}m > 0$ mais $\mathrm{d}\ell < 0$: la hauteur d'eau diminue.

> *Le signe $\ominus$ doit être clairement justifié dans la copie, et ne pas apparaître ni par magie ni comme une arnaque.*

Le bilan d'enthalpie s'écrit donc

$$\mathrm{d}H \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{=} \mathcal{P}_0\,\mathrm{d}t - \alpha(T_{\text{éb}} - T_0)\mathrm{d}t \underset{\substack{\uparrow \\ \text{transf}}}{=} -\rho\, S\, \mathrm{d}\ell\, \Delta_{\text{vap}} h$$

ce qui conduit au résultat attendu

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\rho S\, \Delta_{\text{vap}} h}\left[\mathcal{P}_0 - \alpha(T_{\text{éb}} - T_{\text{a}})\right]\,.}$$

9 La phase d'ébullition commence à l'instant $t = t_1$, où la hauteur d'eau est égale à sa valeur initiale ℓ_0. En intégrant par séparation des variables,

$$\int_{\ell_0}^{0} \mathrm{d}\ell = -\frac{1}{\rho S\, \Delta_{\text{vap}} h}\left[\mathcal{P}_0 - \alpha(T_{\text{éb}} - T_{\text{a}})\right] \int_{t_1}^{\Delta t} \mathrm{d}t$$

d'où

$$-\ell_0 = -\frac{1}{\rho S\,\Delta_{\text{vap}}h}\left[\mathcal{P}_0 - \alpha(T_{\text{éb}} - T_{\text{a}})\right](\Delta t - t_1)$$

soit finalement

$$\boxed{\Delta t = t_1 + \frac{\rho S \ell_0\,\Delta_{\text{vap}}h}{\mathcal{P}_0 - \alpha(T_{\text{éb}} - T_{\text{a}})} = 1{,}0\cdot 10^3\,\text{s} = 17\,\text{min}\,.}$$

> *Le calcul numérique ne nécessite pas de calculer explicitement ℓ_0 : le terme $\rho S \ell_0$ correspond à la masse initiale contenue dans la casserole, à savoir 1 kg.*
>
> *On constate que l'ébullition totale de la casserole prend nettement plus de temps que d'atteindre la température d'ébullition : on retrouve le fait qu'un changement d'état met en jeu bien plus d'énergie qu'un changement de température.*