



Statique des fluides

I - Tunnel de l'aquarium Nausicaa

1 L'eau étant un fluide incompressible, la relation de la statique des fluides s'intègre directement :

$$\frac{dP}{dy} = -\rho g \quad \text{soit} \quad \int_{P_0}^{P(y)} dP = -\rho g \int_H^y dy$$

ce qui donne

$$P(y) = P_0 - \rho g(y - H).$$

2 Voir figure 1 Le plan $\Pi_s = (O, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie du système, les deux forces subies par le tunnel en deux points M et M' symétriques par rapport à ce plan le sont également. On constate alors que les composantes des deux forces pressantes en M et M' se compensent selon \vec{e}_x mais s'ajoutent selon $-\vec{e}_y$. Ce raisonnement pouvant être mené pour n'importe quel point de la surface du tunnel, on en déduit que la résultante des forces qu'il subit est portée par $-\vec{e}_y$.

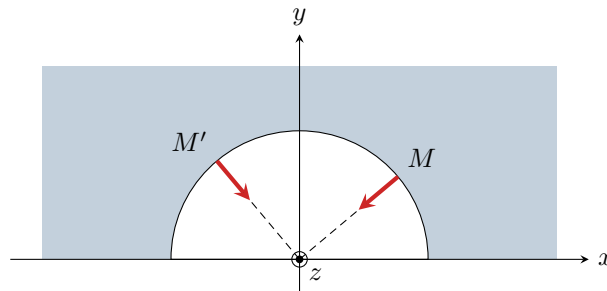


Figure 1 – Forces pressantes en deux points symétriques.

3 Exprimons $P(M)$ en fonction de l'angle θ : on constate géométriquement que

$$y = a \cos \theta \quad \text{donc} \quad P(M) = P_0 - \rho g(a \cos \theta - H).$$

En prenant en compte la force exercée par l'air sur la vitre,

$$d\vec{F}_p = d\vec{F}_{p,\text{air}} + d\vec{F}_{p,\text{eau}} = P_0 dS \vec{e}_r - (P_0 - \rho g(a \cos \theta - H)) dS \vec{e}_r$$

soit

$$d\vec{F}_p = +\rho g(a \cos \theta - H) dS \vec{e}_r = \rho g(a \cos \theta - H) a d\theta dz \vec{e}_r$$

En projetant sur \vec{e}_y , comme $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_y = \cos \theta$, il vient

$$\begin{aligned} dF_{p,y} &= \rho g(a \cos \theta - H) a \cos \theta d\theta dz \\ &= (-\rho g H a \cos \theta + \rho g a^2 \cos^2 \theta) d\theta dz \\ &= \left(-\rho g H a \cos \theta + \rho g a^2 \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \right) d\theta dz \end{aligned}$$

$$dF_{p,y} = \left(\frac{1}{2} \rho g a^2 - \rho g H a \cos \theta + \frac{1}{2} \rho g a^2 \cos(2\theta) \right) d\theta dz.$$

4 Il reste alors à procéder au calcul de l'intégrale. L'intégrale sur dz donne directement L , et il reste l'intégrale sur $d\theta$, que l'on décompose

$$\begin{aligned} F_{p,y} &= \frac{1}{2}\rho g a^2 L \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta - \rho g H a L \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta + \frac{1}{2}\rho g a^2 L \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(2\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2}\rho g a^2 L \times \pi - \rho g H a L [\sin \theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{1}{2}\rho g a^2 L \left[\frac{1}{2} \sin(2\theta) \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= \frac{\pi}{2}\rho g a^2 L - 2\rho g H a L + 0 \\ &\boxed{F_{p,y} = \rho g a L \left(\frac{\pi a}{2} - 2H \right)} \end{aligned}$$

On vérifie que $F_{p,y} < 0$, conformément à ce que prévoyait l'analyse qualitative. Numériquement, on trouve

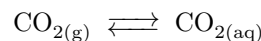
$$\boxed{F_p = 3 \cdot 10^6 \text{ N}}$$

soit une masse équivalente de 300 tonnes.

II - Bulles de champagne

inspiré Concours Général des lycées 2016

5 Considérons la réaction physico-chimique



dont le quotient de réaction s'écrit

$$Q = \frac{[\text{CO}_2]/c^\circ}{p_{\text{CO}_2}/p^\circ} = \frac{c}{p}$$

en omettant les grandeurs standard. Lorsque l'équilibre est atteint, Q est égal à la constante d'équilibre thermodynamique K , d'où

$$\boxed{c = Kp.}$$

6 À l'ouverture de la bouteille, la pression partielle en CO_2 diminue fortement puisque l'air est pauvre en CO_2 . Le quotient de réaction devient donc nettement supérieur à K , ce qui entraîne un déplacement de l'équilibre dans le sens où du CO_2 dissous passe à l'état gazeux ... en formant des bulles!

7 Notons V_0 le volume de la bulle. Son poids a pour norme

$$P = mg = \rho_{\text{gaz}} V_0 g.$$

Comme toute la bulle est immergée, la poussée d'Archimède a pour norme

$$\Pi_A = \rho_{\text{liq}} V_0 g.$$

Ainsi le rapport entre les normes des deux forces vaut

$$\frac{P}{\Pi_A} = \frac{\rho_{\text{gaz}}}{\rho_{\text{liq}}} \sim \frac{1}{1000} \ll 1.$$

Le poids de la bulle peut être négligé devant la poussée d'Archimède.

8 On s'intéresse à la remontée de la bulle dans le référentiel terrestre, considéré galiléen. Le poids étant négligé, la bulle est soumise à la poussée d'Archimède

$$\vec{\Pi}_A = \frac{4}{3}\pi r_0^3 \rho_{\text{liq}} g \vec{e}_z$$

et à la force de Stokes

$$\vec{f} = -6\pi\eta r_0 \vec{v} = -6\pi\eta r_0 v \vec{e}_z.$$

D'après le théorème de la résultante cinétique projeté sur l'axe vertical, En projetant sur l'axe Oz ,

$$m \frac{dv}{dt} = \frac{4}{3} \pi r_0^3 \rho_{\text{liq}} g - 6\pi\eta r_0 v$$

$$m \frac{dv}{dt} + 6\pi\eta r_0 v = \frac{4}{3} \pi r_0^3 \rho_{\text{liq}} g$$

$$\boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{6\pi\eta r_0}{m} v = \frac{\frac{4}{3} \pi r_0^3 \rho_{\text{liq}} g}{m}}$$

On peut alors identifier :

$$\frac{1}{\tau} = \frac{6\pi\eta r_0}{m} \quad \text{soit} \quad \tau = \frac{m}{6\pi\eta r_0} = \frac{\frac{4}{3} \pi r_0^3 \rho_{\text{gaz}}}{6\pi\eta r_0} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\tau = \frac{2r_0^2 \rho_{\text{gaz}}}{9\eta}}$$

La vitesse limite correspond à la solution particulière de l'équation différentielle, que l'on identifie à

$$v_\infty = \frac{\frac{4}{3} \pi r_0^3 \rho_{\text{liq}} g}{6\pi\eta r_0} \quad \text{d'où} \quad \boxed{v_\infty = \frac{2r_0^2 \rho_{\text{liq}} g}{9\eta}}$$

9 L'équation différentielle précédente s'écrit sous forme canonique

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{v_\infty}{\tau},$$

et se résout donc en

$$v(t) = A e^{-t/\tau} + v_\infty.$$

La bulle partant avec une vitesse initiale nulle,

$$v(t=0) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{0} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{expr}}}{A + v_\infty} \quad \text{soit} \quad A = -v_\infty,$$

on en déduit finalement

$$\boxed{v(t) = v_\infty (1 - e^{-t/\tau})}$$

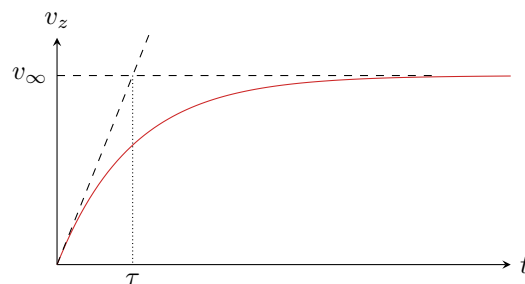


Figure 2 – Vitesse de la bulle de champagne au cours du temps.

10 On trouve $\tau \sim 10^{-4}$ s, ce qui est bien plus faible que le temps que met la bulle à remonter dans la flûte, de l'ordre de 1 s. On peut donc **négliger la durée du transitoire** et considérer que la bulle est à tout instant en régime permanent où $v = v_\infty$.

11 L'allure des bulles sur la photographie figure ?? n'est **pas en accord** avec l'hypothèse de vitesse constante : si c'était le cas, les positions successives seraient régulièrement espacées. L'expression établie précédemment de la vitesse limite montre qu'elle dépend du rayon de la bulle ... or on constate sur la photographie que le rayon des bulles augmente lorsqu'elles remontent dans la flûte. C'est probablement **cette variation de rayon qui est responsable des variations de vitesse**.

12 La remontée de la bulle dans un verre de champagne étant rapide, on peut considérer qu'elle se fait sans transfert thermique et donc de manière adiabatique.

13 Exprimons le champ de pression dans le champagne. On note $z = 0$ la position initiale de la bulle, et p_0 la pression dans le champagne à cet endroit, supposée égale à la pression initiale au sein de la bulle, mais potentiellement

différente de la pression atmosphérique. La relation de la statique des fluides avec l'axe z orienté vers le haut donne alors

$$\frac{dP}{dz} = -\rho_{\text{liq}}g \quad \text{donc} \quad \int_{p_0}^{P(z)} dP = -\rho_{\text{liq}}g \int_0^z dz \quad \text{soit} \quad P(z) = p_0 - \rho_{\text{liq}}gz.$$

En supposant que la remontée de la bulle est non seulement adiabatique mais aussi réversible, on peut utiliser la loi de Laplace :

$$p_0 V_0^\gamma = P(z) V(z)^\gamma \quad \text{soit} \quad p_0 r_0^{3\gamma} = (p_0 - \rho_{\text{liq}}gz) r(z)^{3\gamma} \quad \text{d'où} \quad r_0 = \left(1 - \frac{\rho_{\text{liq}}gz}{p_0}\right)^{1/3\gamma} r(z),$$

et en inversant cette relation il vient

$$r(z) = \left(1 - \frac{\rho_{\text{liq}}gz}{p_0}\right)^{-1/3\gamma} r_0.$$

Pour $z = 10$ cm, avec $p_0 \sim 1$ bar et $\rho_{\text{liq}} = 1 \cdot 10^3$ kg \cdot m $^{-3}$, on trouve

$$r(z) = 1,0025 r_0 \quad !!!$$

Ainsi, les variations de pression n'ont presque aucun effet sur le rayon de la bulle, alors que la photographie montre clairement que la bulle grossit même en quelques millimètres. C'est donc la seconde hypothèse qui est correcte : la bulle grossit car elle contient de plus en plus de CO₂ au fur et à mesure de sa remontée.