DM 9 – à rendre lundi 5 décembre

Correction

Énergétique des écoulements

Rendement d'une éolienne

A - Puissance cédée au rotor de l'éolienne

1 L'écoulement est horizontal, et la pression est la même au niveau des surfaces S et S'. Ainsi, l'énergie prélevée à l'écoulement d'air par l'éolienne est forcément de type cinétique. On a donc $v' < v$, et la conservation du débit le long du tube de courant impose

$$vS = v'S' \qquad \text{donc} \qquad S' = \frac{v}{v'} S > S\,.$$

Il est donc logique que le tube de courant s'élargisse.

> *Attention, contrairement au cas d'un écoulement en conduite, les surfaces S et S' sont ici inconnues, et dépendent des vitesses v et v' du vent avant et après l'éolienne. On obtient donc des informations sur les sections à partir de connaissances sur les vitesses.*

2 Par conservation du débit, sachant que $S_1 = S_2 = S_0$, on a directement égalité des vitesses au niveau des deux sections S_1 et S_2.

3 Utilisons la relation de Bernoulli généralisée entre les sections S et S', en notant $\mathcal{P}$ la puissance cédée par l'écoulement au rotor de l'éolienne :

$$D_\mathrm{m} \left[\left(\cancel{\frac{P_0}{\rho}} + \frac{v'^2}{2} + \cancel{gz'} \right) - \left(\cancel{\frac{P_0}{\rho}} + \frac{v^2}{2} + \cancel{gz} \right) \right] = -\mathcal{P}$$

En exprimant le débit massique D_m au niveau de l'éolienne, on a

$$D_\mathrm{m} = \rho S_0 v_0 = \rho S_0 \frac{v + v'}{2}\,,$$

ce qui donne

$$\mathcal{P} = \rho S_0 \frac{v+v'}{2} \times \left(\frac{v^2}{2} - \frac{v'^2}{2} \right)$$

et ainsi

$$\boxed{\mathcal{P} = \frac{1}{4} \rho\, S_0\, (v + v')\, (v^2 - v'^2)\,.}$$

B - Limite de Betz

4 Par définition du débit massique, la masse d'air traversant S s'écrit

$$\delta m = D_\mathrm{m}\, \mathrm{d}t\,.$$

En considérant que toutes les particules fluides formant la masse δm ont la même vitesse v égale à la vitesse de l'écoulement (hypothèse d'écoulement parfait), alors l'énergie cinétique de la masse d'air vaut

$$\delta E_\mathrm{c} = \frac{1}{2}\, \delta m\, v^2 = \frac{1}{2}\, D_\mathrm{m}\, v^2\, \mathrm{d}t\,.$$

On obtient alors le résultat annoncé,

$$\boxed{\mathcal{P}_\mathrm{cin} = \frac{1}{2}\, D_\mathrm{m}\, v^2\,.}$$

5 La puissance cinétique du vent non perturbé est la puissance maximale qu'il est possible de récupérer au niveau de l'éolienne, ce qui justifie la définition.

6 La puissance cinétique de référence vaut

$$\mathcal{P}_{\text{cin}} = \frac{1}{2} \times \rho S_0 v \times v^2 = \frac{1}{2}\rho S_0 v^3 \,.$$

Ainsi, le rendement s'écrit

$$\begin{aligned}
\eta &= \frac{\frac{1}{4}\,\rho\, S_0\,(v+v')\,(v^2-{v'}^2)}{\frac{1}{2}\rho S_0 v^3} \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{v+v'}{v} \times \frac{v^2-{v'}^2}{v^2} \\
&= \frac{1}{2}\,(1+x)\times(1-x^2) \\
&= \frac{1}{2}\,(1+x)\times(1+x)(1-x)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\eta = \frac{1}{2}(1+x)^2(1-x)\,.}$$

7 La dérivée s'écrit

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{2}\left[(1+x)^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1-x) + (1-x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+x)^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[-(1+x)^2 + (1-x)\times 2(1+x)\right] \\
&= \frac{1}{2}(1+x)\left(-(1+x)+2(1-x)\right) \\
\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{2}(1+x)(1-3x)
\end{aligned}$$

La quantité x étant forcément comprise entre 0 et 1, le seul zéro pertinent de la dérivée est pour $x = 1/3$, valeur pour laquelle on a

$$\eta_{\text{opt}} = \frac{1}{2}\times\frac{4^2}{3^2}\times\frac{2}{3} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\eta_{\text{opt}} = \frac{16}{27} \simeq 0{,}59\,.}$$

8 La vitesse de sortie dépend directement de la vitesse de rotation des pales, qui résulte d'un équilibre entre le couple aérodynamique exercé par l'écoulement d'air sur l'éolienne et le couple de freinage électromagnétique résultant de la rotation de la génératrice. Ainsi, pour contrôler indirectement v', il faut **jouer sur la charge électrique vue par la génératrice** se trouvant dans l'éolienne.

C - Vitesse d'écoulement au niveau de l'éolienne

9 Appliquons le théorème de Bernoulli entre les sections S et S_1. L'éolienne ne faisant *pas* partie de ce volume de contrôle, on a directement

$$\frac{P_0}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \cancel{gz} = \frac{P_1}{\rho} + \frac{{v_0}^2}{2} + \cancel{gz} \qquad \text{soit} \qquad P_1 = P_0 + \frac{1}{2}\rho(v^2 - {v_0}^2)\,.$$

De même, le théorème de Bernoulli appliqué entre S_2 et S' donne

$$P_2 = P_0 + \frac{1}{2}\rho({v'}^2 - {v_0}^2)\,.$$

Considérons un volume de contrôle compris entre les sections S_1 et S_2, englobant l'éolienne. Une face est soumise à la pression P_1, l'autre à la pression P_2, et le pourtour à la pression P_0. Les forces pressantes exercées sur le pourtour s'annulent par symétrie, et il reste finalement

$$\vec{F} = P_1 S_0\,\vec{e}_x - P_2 S_0\,\vec{e}_x = (P_1 - P_2) S_0\,\vec{e}_x$$

ce qui donne bien

$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{2}\rho S_0(v^2 - {v'}^2)\,\vec{e}_x\,.}$$

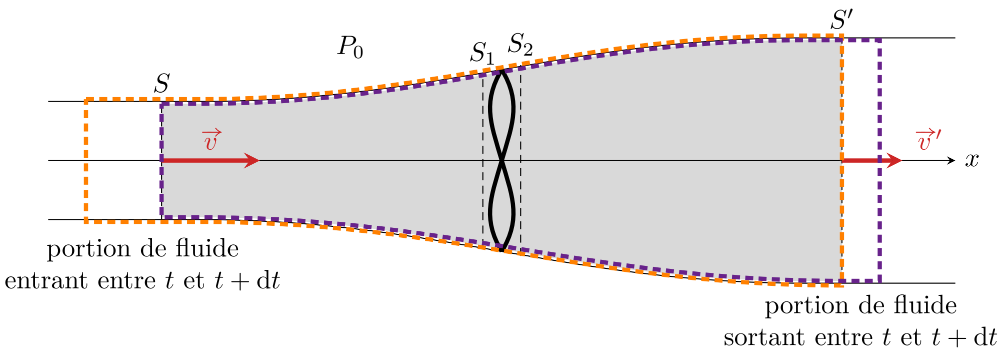

Figure 1 – Schéma du système fermé. Le volume de contrôle Σ_0 est coloré en gris, le système fermé $\Sigma^\star$ délimité par les pointillés épais. La position du système fermé à l'instant t est représentée en orange, celle à $t + \mathrm{d}t$ en violet.

10 En régime stationnaire, la masse du volume de contrôle est constante : l'entrée d'une masse δm doit forcément être compensée par la sortie d'une masse égale. Schéma représenté figure 1.

11 À l'instant t, la quantité de mouvement de Σ_0 s'ajoute à celle du fluide entrant,

$$\vec{p}^\star(t) = \vec{p}_0(t) + \delta m \vec{v}\,.$$

À l'instant $t + \mathrm{d}t$, il faut cette fois considérer celle du fluide sortant,

$$\vec{p}^\star(t + \mathrm{d}t) = \vec{p}_0(t + \mathrm{d}t) + \delta m \vec{v}'\,.$$

Or par stationnarité la quantité de mouvement du système ouvert $\vec{p}_0$ est constante. Par soustraction des deux égalités, on aboutit directement à

$$\boxed{\vec{p}^\star(t + \mathrm{d}t) - \vec{p}^\star(t) = D_\mathrm{m}(\vec{v}' - \vec{v})\,\mathrm{d}t\,.}$$

12 Le système fermé est soumis à la force exercée par l'éolienne sur l'air, égale à $-\vec{F}$ d'après le principe des actions réciproques. Par ailleurs, le tube de courant est une surface fermée soumise à une pression uniforme P_0 : la résultante des forces pressantes est nulle par symétrie. Ainsi, le théorème de la résultante cinétique appliqué au système fermé s'écrit

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{p}^\star}{\mathrm{d}t} = -\vec{F}\,.}$$

Par ailleurs, en utilisant la formule de Taylor dans le résultat de la question précédente, il vient

$$\cancel{\vec{p}^\star(t)} + \frac{\mathrm{d}\vec{p}^\star}{\mathrm{d}t}\cancel{\mathrm{d}t} - \cancel{\vec{p}^\star(t)} = D_\mathrm{m}(\vec{v}' - \vec{v})\cancel{\mathrm{d}t} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{p}^\star}{\mathrm{d}t} = D_\mathrm{m}(\vec{v}' - \vec{v})\,.}$$

On en déduit finalement

$$\boxed{\vec{F} = -D_\mathrm{m}(\vec{v}' - \vec{v}) = -D_\mathrm{m}(v' - v)\,\vec{e}_x\,.}$$

13 En identifiant les deux expressions de la force $\vec{F}$, il vient

$$-D_\mathrm{m}(v' - v) = \frac{1}{2}\rho S_0(v^2 - v'^2)$$
$$-\cancel{\rho S_0} v_0(v' - v) = \frac{1}{2}\cancel{\rho S_0}(v - v')(v + v')$$
$$v_0\cancel{(v - v')} = \frac{1}{2}\cancel{(v - v')}(v + v')$$

ce qui donne bien le résultat annoncé

$$\boxed{v_0 = \frac{v + v'}{2}\,.}$$