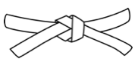
BLAISE PASCAL
PT 2022-2023

DM 9 – à rendre lundi 5 décembre

Énergétique des écoulements

Travailler avec vos cours et TD ouverts est **chaudement recommandé** : un DM est un entraînement, pas une évaluation. En cas de besoin, **n'hésitez pas à me poser des questions**, à la fin d'un cours ou sur le serveur de la classe.

Ceinture		Travail à réaliser
	Ceinture blanche	Parties A et B
	Ceinture jaune	Parties A et B
	Ceinture rouge	Tout
	Ceinture noire	Tout

Flasher ce code pour accéder au corrigé

Rendement d'une éolienne

De par sa grande façade maritime, la France possède le deuxième gisement éolien européen après la Grande-Bretagne. Fin 2022, le parc éolien français atteint une puissance installée d'environ 20 GW, ce qui correspond à 6 à 7 % du mix électrique, auxquels s'ajouteront prochainement environ 15 GW de projets en cours d'instruction. Cet exercice aborde la question du rendement d'une éolienne, dont on va montrer qu'il ne peut dépasser une borne supérieure appelée limite de Betz.

Considérons une éolienne occupant une surface frontale S_0. L'écoulement de l'air est supposé parfait, stationnaire, incompressible, unidimensionnel parallèlement à l'axe (Ox). On raisonne sur le tube de courant représenté figure 1 qui traverse le rotor de l'éolienne. Les deux sections S et S' sont supposées suffisamment éloignées du rotor pour que la pression y soit égale à la pression atmosphérique au repos P_0, comme partout autour du tube de courant considéré. On note S_1 et S_2 les deux sections immédiatement en amont et en aval du rotor, supposées suffisamment proches pour avoir $S_1 = S_2 = S_0$. Les vitesses et les pressions s'entendent comme des moyennes spatiales et temporelles sur la section considérée.

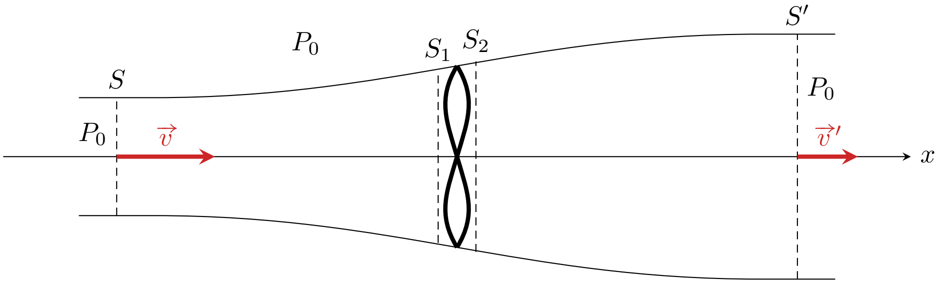


Figure 1 – Tube de courant entourant l'éolienne.

A - Puissance cédée au rotor de l'éolienne

1 - Justifier qualitativement l'allure du tube de courant représenté figure 1.

2 - Montrer qu'il y a égalité des vitesses dans les sections S_1 et S_2. On note v_0 la vitesse correspondante, dont on admet pour le moment (démonstration partie C) qu'elle est reliée à v et v' par

$$v_0 = \frac{v + v'}{2}\,.$$

Étienne Thibierge, 16 novembre 2022, www.etienne-thibierge.fr

3 - En utilisant la relation de Bernoulli généralisée, montrer que la puissance reçue par le rotor de l'éolienne peut s'écrire

$$\mathcal{P} = \frac{1}{4}\,\rho\,S_0\,(v+v')\,(v^2-v'^2)\,.$$

B - Limite de Betz

Du fait de l'écoulement, une surface S est traversée par une certaine masse d'air δm pendant une durée $\mathrm{d}t$. Chaque particule fluide possédant une énergie cinétique, à ce flux de matière est associé un flux d'énergie cinétique δE_c. En se ramenant à l'unité de temps, on appelle $\delta E_\mathrm{c}/\mathrm{d}t$ la puissance cinétique du vent au travers de la section S.

4 - De façon générique, montrer que la puissance cinétique du vent au travers d'une surface S est reliée à la vitesse v d'écoulement et au débit massique D_m au travers de cette surface par

$$\mathcal{P}_\mathrm{cin} = \frac{1}{2} D_\mathrm{m} v^2\,.$$

Le rendement ou coefficient de puissance de l'éolienne est conventionnellement défini comme le rapport entre la puissance $\mathcal{P}$ cédée au rotor et la puissance cinétique $\mathcal{P}_\mathrm{cin}$ du vent au travers d'une surface S_0, égale à celle de l'éolienne, mais à la vitesse v de l'écoulement *non perturbé*.

5 - Justifier qualitativement cette convention de définition du rendement.

6 - Montrer que le rendement de l'éolienne peut s'écrire sous la forme

$$\eta = \frac{1}{2}(1+x)^2(1-x) \qquad \text{avec} \qquad x = \frac{v'}{v}\,.$$

7 - Montrer que ce rendement passe par un optimum η_max, appelé limite de Betz, pour une valeur de x à déterminer. Calculer η_max.

8 - En pratique, la vitesse de sortie v' n'est pas directement contrôlable dans le dimensionnement d'une éolienne. Sur quel(s) paramètre(s) peut-on jouer néanmoins pour optimiser le rendement ?

Les nombreuses hypothèses simplificatrices du calcul font de la limite de Betz un maximum théorique, non atteignable en pratique. Les éoliennes modernes parviennent à atteindre jusqu'à 75 % de la limite de Betz dans les conditions de vent optimales.

C - Vitesse d'écoulement au niveau de l'éolienne

Cette dernière partie a pour objectif de démontrer la relation admise à la question 2 : au niveau de l'éolienne, la vitesse moyenne d'écoulement vaut

$$v_0 = \frac{v+v'}{2}\,.$$

La démarche consiste à exprimer de deux façons différentes la force $\overrightarrow{F}$ exercée par le vent sur le rotor de l'éolienne, et à identifier ces deux expressions.

9 - Exprimer les pressions P_1 et P_2 au niveau des sections S_1 et S_2. En déduire que la force exercée par le vent sur le rotor de l'éolienne s'écrit

$$\overrightarrow{F} = \frac{1}{2}\rho S_0 (v^2 - v'^2)\,\overrightarrow{e}_x\,.$$

La deuxième expression s'obtient à partir d'un bilan de quantité de mouvement pour le système ouvert Σ_0 défini la masse d'air appartenant au tube de courant étudié délimité par les deux sections S et S'. La démarche est sensiblement analogue à celle nous ayant permis de démontrer la relation de Bernoulli, si ce n'est que l'on raisonne sur la quantité de mouvement $\overrightarrow{p}$ au lieu de l'énergie mécanique.

Considérons sur une durée infinitésimale $\mathrm{d}t$. Partant du système ouvert Σ_0, on se ramène à un système fermé $\Sigma^\star$ en lui adjoignant la masse de fluide δm entrant dans Σ_0 pendant $\mathrm{d}t$. Toutes les grandeurs relatives au système fermé sont indiquées par une étoile.

10 - Justifier qu'une même masse de fluide δm sort de Σ_0 pendant $\mathrm{d}t$. Faire un schéma sur lequel apparaissent clairement Σ_0 et le système fermé $\Sigma^\star$ aux deux instants t et $t+\mathrm{d}t$.

11 - Exprimer séparément $\overrightarrow{p}^\star(t)$ et $\overrightarrow{p}^\star(t+\mathrm{d}t)$ et en déduire que

$$\overrightarrow{p}^\star(t+\mathrm{d}t) - \overrightarrow{p}^\star(t) = D_\mathrm{m}(\overrightarrow{v} - \overrightarrow{v}')\,\mathrm{d}t\,.$$

12 - Avec le théorème de la résultante cinétique, montrer que $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}^\star}{\mathrm{d}t} = -\overrightarrow{F}$ et déduire une seconde expression de $\overrightarrow{F}$.

13 - Conclure sur l'expression de v_0 par identification des deux expressions obtenues aux questions 9 et 12.