



# Théorème de Gauss gravitationnel

## Gravimétrie

*inspiré Centrale MP 2018*

1 La force de gravitation exercée par la masse  $m_1$  sur la masse  $m_2$  vaut

$$\vec{F}_{g,1 \rightarrow 2} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2},$$

où  $r$  est la distance séparant les deux masses et  $\vec{u}_{1 \rightarrow 2}$  le vecteur unitaire dirigé de la masse  $m_1$  vers la masse  $m_2$ . Avec des notations analogues, la force électrostatique exercée par la charge  $q_1$  sur la charge  $q_2$  vaut

$$\vec{F}_{e,1 \rightarrow 2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2}.$$

Le théorème de Gauss relie le flux du champ électrostatique sortant d'une surface de Gauss à la charge  $Q_{\text{int}}$  contenue à l'intérieur de cette surface,

$$\oiint_{\text{SG}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}.$$

En raisonnant sur l'expression des forces, l'analogie du champ électrostatique  $\vec{E}$  est le champ gravitationnel  $\vec{g}$ ; l'analogie de la charge est la masse; et l'analogie de  $1/\epsilon$  est  $-4\pi G$ . Le théorème de Gauss gravitationnel s'écrit donc

$$\oiint_{\text{SG}} \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{\text{int}}.$$

2 Soit  $M$  un point à l'extérieur de la sphère. On raisonne dans une base sphérique de centre  $O$  le centre de la sphère.

• **Symétries** : Tout plan contenant les points  $O$  et  $M$  est plan de symétrie de la distribution de masse. Le champ de gravitation  $\vec{g}(M)$  est donc inclus dans chacun de ces plans, donc dans leur intersection. Il est donc porté par la droite  $(OM)$ , d'où

$$\vec{g}(M) = g_r(M) \vec{e}_r.$$

• **Invariances** : La distribution de masse est invariante par toute rotation autour du centre  $O$  de la sphère. Le champ  $\vec{g}(M)$  est donc indépendant des coordonnées angulaires  $\theta$  et  $\varphi$ , d'où

$$\vec{g}(M) = g_r(r) \vec{e}_r.$$

• **Théorème de Gauss gravitationnel** : On raisonne sur la sphère de rayon  $r$  passant par  $M$ . Comme  $M$  est extérieur à la sphère créant le champ gravitationnel, la masse contenue dans cette surface de Gauss est sa masse totale,

$$M_{\text{int}} = \frac{4}{3}\pi R^3 \mu.$$

Par application du théorème de Gauss gravitationnel,

$$\oiint_{\text{SG}} \vec{g} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 g_r(r) = -4\pi G \times \frac{4}{3}\pi R^3 \mu.$$

On en déduit

$$\vec{g}(M) = -\frac{4}{3}\pi G \mu \frac{R^3}{r^2} \vec{e}_r.$$

- **Champ de pesanteur terrestre** : dans le cas du champ de pesanteur terrestre, le vecteur  $\vec{e}_r$  du calcul précédent correspond au vecteur  $-\vec{e}_z$  de la figure et  $r = R = R_0$ . Ainsi,

$$\vec{g}_0 = -\frac{4}{3}\pi G\mu_0 \frac{R_0^3}{R_0^2}(-\vec{e}_z) \quad \text{soit} \quad \boxed{\vec{g}_0 = \frac{4}{3}\pi G\mu_0 R_0 \vec{e}_z.}$$

- **Champ gravitationnel créé par le corps sphérique** : on déduit directement du calcul précédent

$$\boxed{\vec{g}'(M) = -\frac{4}{3}\pi G\mu' \frac{R^3}{r^2} \vec{e}_r.}$$

- 3 Compte tenu de la définition de l'angle  $\theta$  sur la figure,  $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_z = -\cos\theta$ , d'où

$$g'_z(M) = -g(M) \cos\theta = +\frac{4}{3}\pi G\mu' \frac{R^3}{r^2} \cos\theta.$$

De plus,  $\cos\theta = h/r$  d'où

$$g'_z(M) = \frac{4}{3}\pi G\mu' \frac{R^3}{r^3} h.$$

Enfin, d'après le théorème de Pythagore,  $r = \sqrt{h^2 + x^2}$  donc

$$\boxed{g'_z(M) = g'_z(x) = \frac{4}{3}\pi G\mu' \frac{R^3}{(h^2 + x^2)^{3/2}} h.}$$

- 4 La distribution de masse en présence de la cavité peut s'interpréter comme la superposition de trois distributions, voir figure 1 : la Terre homogène de masse volumique  $\mu_0$ , à laquelle on a retiré une sphère de masse volumique  $\mu_0$  qui « vide » la zone où se trouve le corps sphérique et enfin le corps sphérique lui-même de masse volumique  $\mu'$ .

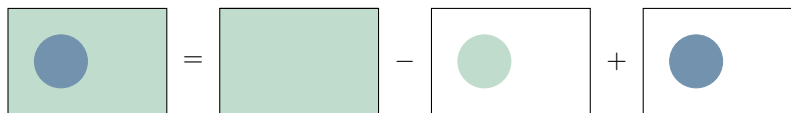


Figure 1 – Distribution de masse équivalente.

Par le théorème de superposition, le champ gravitationnel total est la somme des champs gravitationnels créés par ces trois distributions, soit

$$\vec{g}(M) = \vec{g}_0 - \left[ -\frac{4}{3}\pi G\mu_0 \frac{R^3}{r^2} \vec{e}_r \right] + \left[ -\frac{4}{3}\pi G\mu' \frac{R^3}{r^2} \vec{e}_r \right] = \vec{g}_0 - \frac{4}{3}\pi G \Delta\mu \frac{R^3}{r^2} \vec{e}_r$$

D'après la question précédente, on a en projection sur  $\vec{e}_z$ ,

$$g_z(M) = g_0 + \frac{4}{3}\pi G \Delta\mu \frac{R^3}{(h^2 + x^2)^{3/2}} h,$$

d'où on déduit l'anomalie gravimétrique

$$\boxed{\Delta g(x) = \frac{4}{3}\pi G \Delta\mu \frac{R^3 h}{(h^2 + x^2)^{3/2}}.}$$

- 5 L'anomalie gravimétrique maximale est observée à la verticale du corps sphérique, en  $x_0 = 0$ . Elle vaut

$$\Delta g_{\max} = \frac{4}{3}\pi G \Delta\mu \frac{R^3 h}{h^3} \quad \text{soit} \quad \boxed{\Delta g_{\max} = \frac{4}{3}\pi G \Delta\mu \frac{R^3}{h^2}.}$$

Exprimons la largeur à mi-hauteur  $\Delta x$ ,

$$\begin{aligned} \Delta g(\Delta x) &= \frac{\Delta g_{\max}}{2} \\ \frac{4}{3}\pi G \Delta\mu \frac{R^3 h}{(h^2 + \Delta x^2)^{3/2}} &= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi G \Delta\mu \frac{R^3 h}{h^3} \\ (h^2 + \Delta x^2)^{3/2} &= 2h^3 \\ h^2 + \Delta x^2 &= 2^{2/3}h^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\Delta x = h\sqrt{2^{2/3} - 1}.}$$

6 Voir figure 2. Compte tenu des résultats de la question précédente, la courbe correspondant à la profondeur  $h_1$  (en rouge sur la figure) a un maximum quatre fois plus élevé et sa largeur à mi-hauteur est deux fois plus étroite que celle correspondant à la courbe  $h_2$  (en bleu sur la figure).

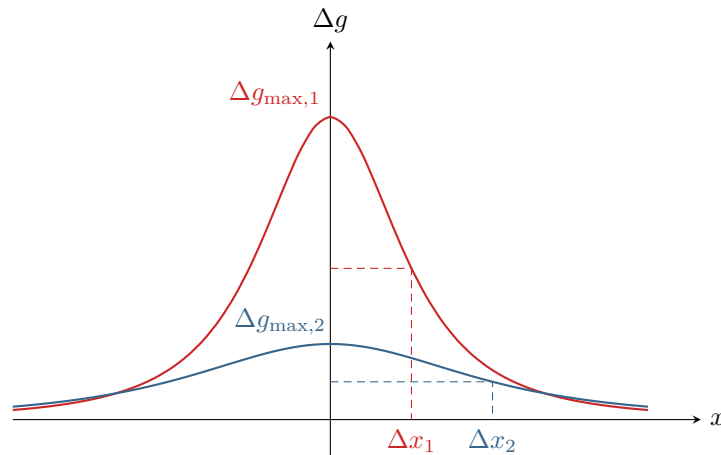


Figure 2 – Anomalie gravimétrique pour deux profondeurs différentes. La courbe en bleu correspond à une profondeur  $h_1$  ; la courbe en rouge à une profondeur  $h_2 = 2h_1$ .

7 On lit graphiquement une anomalie maximale

$$\Delta g_{\max} \simeq -9,5 \cdot 10^{-8} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

et une largeur à mi-hauteur

$$\Delta x \simeq 3,3 \text{ m}.$$

On en déduit

$$h = \frac{\Delta x}{\sqrt{2^{2/3} - 1}} \simeq 4 \text{ m}.$$

La grotte étant vide, on a ici  $\Delta\mu = -\mu_0$ , d'où

$$\Delta g_{\max} = -\frac{4}{3}\pi G \mu_0 \frac{R^3}{h^2} = -\frac{4}{3}\pi G \frac{M_0}{\frac{4}{3}\pi R_0^3} \frac{R^3}{h^2} = -\frac{M_0 G}{h^2} \frac{R^3}{R_0^3}$$

et ainsi

$$R = \left( \frac{|\Delta g_{\max}| h^2}{M_0 G} \right)^{1/3} R_0 \simeq 1 \text{ m}.$$

8 La grotte et l'or qui y est caché sont indétectables si l'anomalie gravimétrique due à l'or (positive car il est plus dense que le sol) compense exactement l'anomalie gravimétrique (négative) due à la grotte. Pour cela, il faut d'abord que l'or soit stocké dans une sphère située au centre de la grotte. En généralisant la question 4, l'anomalie gravimétrique totale vaut

$$\Delta g(x) = \frac{4}{3}\pi G \mu_{\text{or}} \frac{R_{\text{or}}^3 h}{(h^2 + x^2)^{3/2}} - \frac{4}{3}\pi G \mu_0 \frac{R^3 h}{(h^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{4}{3}\pi G (\mu_{\text{or}} R_{\text{or}}^3 - \mu_0 R^3) \frac{h}{(h^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Elle est donc partout nulle si

$$\mu_{\text{or}} R_{\text{or}}^3 = \mu_0 R^3.$$

La masse d'or à cacher dans la grotte vaut donc

$$m_{\text{or}} = \frac{4}{3}\pi \mu_{\text{or}} R_{\text{or}}^3 \quad \text{soit} \quad m_{\text{or}} = \frac{4}{3}\pi \mu_0 R^3 = 2,3 \cdot 10^4 \text{ kg}.$$

Un kg d'or coûtant 54 100 € en décembre 2022, j'espère pour les brigands qu'ils sont très riches ! En tout cas, ils n'auront **pas de problème de place** : comme  $\mu_{\text{or}} > \mu_0$ , alors  $R_{\text{or}} < R$ .