



BLAISE PASCAL
PT 2022-2023





DM 10 – à rendre lundi 12 décembre

Théorème de Gauss gravitationnel

Travailler avec vos cours et TD ouverts est **chaudement recommandé** : un DM est un entraînement, pas une évaluation. En cas de besoin, **n'hésitez pas à me poser des questions**, à la fin d'un cours ou sur le serveur de la classe.



Flasher ce code pour accéder au corrigé

Ceinture		Travail à réaliser
	Ceinture blanche	Questions 1 à 5
	Ceinture jaune	Questions 1 à 5
	Ceinture rouge	En entier
	Ceinture noire	En entier

Gravimétrie

inspiré Centrale MP 2018

La gravimétrie est l'étude des variations du champ de pesanteur dans l'espace et dans le temps. Elle permet de déterminer la répartition des masses au sein de la Terre et d'avoir ainsi accès à sa structure. Par exemple, la gravimétrie est utilisée pour déterminer la forme de la Terre (géodésie), pour détecter des cavités (génie civil ou archéologie), pour suivre le niveau des nappes phréatiques (hydrologie continentale), etc.

Données :

- ▷ Constante de gravitation universelle : $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$;
- ▷ Rayon de la Terre : $R_0 = 6,37 \cdot 10^3 \text{ km}$;
- ▷ Masse de la Terre : $M_0 = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$;
- ▷ Masse volumique de l'or : $\mu_{\text{or}} = 1,93 \cdot 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Nous allons dans un premier temps étudier l'anomalie gravimétrique due à un corps sphérique de masse volumique μ' situé dans un sol homogène de masse volumique μ_0 avant de conseiller des brigands en quête d'une cachette pour leur or.

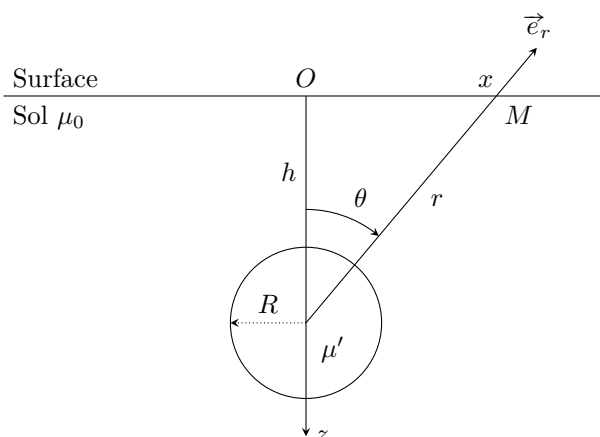


Figure 1 – Corps sphérique au sein d'un sol homogène.

1 - Rappeler les expressions de la force de gravitation exercée entre deux masses ponctuelles m_1 et m_2 et de la force électrostatique exercée entre deux charges ponctuelles q_1 et q_2 . En déduire le théorème de Gauss gravitationnel, par analogie avec le théorème de Gauss électrostatique.

2 - Par une application rigoureuse du théorème de Gauss, établir l'expression du champ de gravitation en un point M situé à l'extérieur d'une sphère homogène de rayon R et de masse volumique μ en fonction de μ , G , R , r (distance de M au centre de la sphère), et du vecteur unitaire \vec{e}_r . En déduire le champ de pesanteur \vec{g}_0 à la surface de la Terre en la supposant de masse volumique μ_0 uniforme, c'est-à-dire en négligeant le corps sphérique, et du champ gravitationnel $\vec{g}'(M)$ créé par le corps sphérique pris seul. On utilisera les notations de la figure 1.

3 - Notons $x = OM$ la distance entre le point M et le point O de la surface placé à la verticale du corps sphérique. Déterminer la composante verticale $g'_z(x)$ du champ gravitationnel créé par le corps sphérique en fonction de h et x seulement.

4 - Posons $\Delta\mu = \mu' - \mu_0$. En utilisant le théorème de superposition, montrer que l'anomalie gravimétrique $\Delta g = g_z - g_0$ qui décrit les variations du champ de pesanteur apparent vaut

$$\Delta g(x) = \frac{4}{3}\pi G \Delta\mu \frac{R^3 h}{(h^2 + x^2)^{3/2}}.$$

5 - Que vaut l'anomalie gravimétrique maximale Δg_{\max} ? À quelle abscisse x_0 est-elle mesurée? La largeur à mi-hauteur Δx de la courbe d'anomalie gravimétrique est définie par $\Delta g(x_0 \pm \Delta x) = \Delta g_{\max}/2$. Montrer que Δx est proportionnelle à h .

6 - Tracer sur une même figure l'allure de la courbe $\Delta g(x)$ pour deux sphères identiques enterrées à deux profondeurs différentes h_1 et $h_2 = 2h_1$. On supposera $\Delta\mu > 0$, et on veillera à mettre en évidence l'influence de h_1 et h_2 sur ces tracés.

7 - Des brigands très forts en physique souhaitent cacher de l'or en le dissimulant dans une grotte sphérique. Ils mesurent la courbe d'anomalie gravimétrique de la figure 2. Déterminer le rayon R de la grotte et la profondeur h à laquelle elle se trouve.

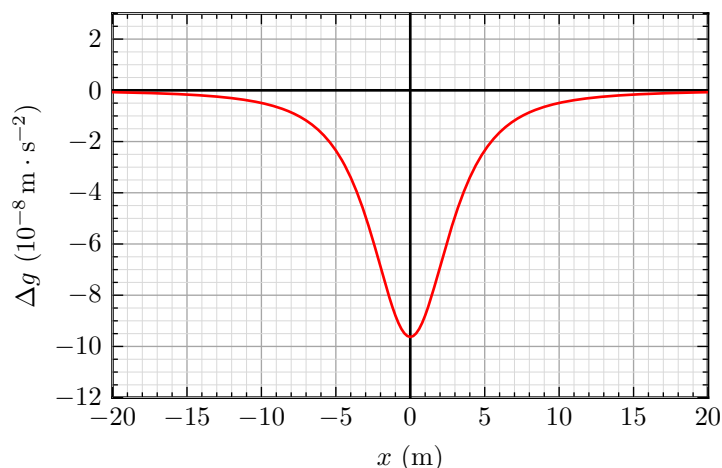


Figure 2 – Anomalie gravimétrique mesurée.

8 - Terrifiés à l'idée de tomber sur des soldats du roi qui seraient eux aussi très forts en physique, les brigands souhaitent que la grotte et l'or qui y est caché soient indétectables par analyse gravimétrique. Cela est-il possible? Si oui, quelle masse d'or les brigands doivent-ils cacher? La grotte est-elle assez grande pour la contenir?