Résistances thermiques

I - Isolation et chauffage d'un appartement

PT B 2018

10 On constate sur le document 2 qu'interposer des couches d'air à l'intérieur des matériaux diminue assez nettement la conductance thermique surfacique (simple vs. double vitrage, mur plein vs. mur creux). On constate également que l'épaisseur ne fait pas tout en ce qui concerne l'isolation, les propriétés intrinsèques du matériau jouent aussi (polystyrène vs. mur).

On constate sur le document 3 que l'air sec est un isolant aussi performant que la laine de verre (tant qu'il n'y a pas de convection !), ce qui explique pourquoi les performances des murs creux et du double vitrage. On peut aussi comprendre à la lecture de ce document pourquoi on ne fait pas de murs en cuivre :)

> *Mon inspiration s'arrête ici ...*

11 **Classique** Un double vitrage est composé de deux couches de verre qui encadrent une couche d'air, voir figure 1. Les trois résistances thermiques sont associées en série, donc leur résistance s'ajoutent. La couche d'air est un très bon isolant thermique ($\lambda_{\text{air}} \simeq \lambda_{\text{laine verre}}$), donc de forte résistance thermique, ce qui permet de considérablement augmenter la résistance thermique de l'ensemble : ce gain correspond à une division par 2 de la conductance thermique surfacique.

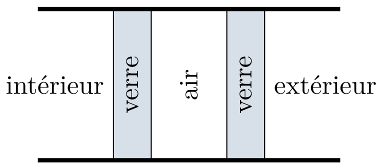

Figure 1 – **Schéma d'un double vitrage.**

12 La résistance thermique d'une paroi de surface $S = 1\,\mathrm{m}^2$ est donnée par $R = 1/U_{\mathrm{w}}S$, donc

$$\Phi = \frac{\Delta T}{R} = U_{\mathrm{w}} S\, \Delta T = 10\, U_{\mathrm{w}} \ (\text{en W})\,.$$

L'énergie consommée s'en déduit

$$E = \Phi\, \Delta t = 40 U_{\mathrm{w}} \ \ (\text{en kWh})\,,$$

et enfin le coût à partir du prix p d'un kWh,

$$\text{coût} = E \times p = 6 U_{\mathrm{w}} \ (\text{en euros})$$

	Φ (W)	Énergie annuelle (kWh)	Coût annuel (euros)
Simple vitrage	60	240	36
Double vitrage	30	120	18

13 La démarche est identique concernant le mur non isolé. Pour le mur isolé, il faut calculer le coefficient de performance. Les matériaux sont montés en série donc

$$R_{\text{tot}} = R_{\text{mur}} + R_{\text{PS}} = \left(\frac{1}{U_{\mathrm{w,mur}}} + \frac{1}{U_{\mathrm{w,PS}}}\right)\frac{1}{S}$$

On en déduit

$$U_{\mathrm{w,tot}} = \frac{U_{\mathrm{w,mur}}\, U_{\mathrm{w,PS}}}{U_{\mathrm{w,mur}} + U_{\mathrm{w,PS}}} = 2{,}5\,\mathrm{W \cdot K^{-1} \cdot m^{-2}}$$

	Φ (W)	Énergie annuelle (kWh)	Coût annuel (euros)
Mur non isolé	20	80	12
Mur isolé	4	16	2,4

L'économie réalisée est donc d'environ 10 € par m^2 ... sans parler du bilan carbone.

14a Les fenêtres orientées au sud reçoivent **davantage d'ensoleillement**, et permettent donc de chauffer l'appartement par rayonnement. Les fenêtres au nord ne bénéficiant pas de cet ensoleillement, on les fait petites pour limiter les pertes thermiques. Ce qui est un avantage en hiver devient un inconvénient en été par forte chaleur : les arbres à feuille caduques permettent d'**ombrager l'appartement en été** mais pas en hiver.

14b Schématiquement, l'effet des volets s'apparente à une résistance thermique supplémentaire montée en parallèle des murs et fenêtres. L'isolation est d'autant meilleure que le matériau est mauvais conducteur : il vaut donc mieux des **volets en bois** plutôt qu'en métal.

15 Cours Le volume d'air est

$$\boxed{V = 100 \times 2{,}5 = 250\,\mathrm{m}^3}$$

ce qui correspond à une masse

$$\boxed{m = \rho V = 300\,\mathrm{kg}\,.}$$

16a Cours Par définition,

$$C = m C_{P,\mathrm{m}} = 300\,\mathrm{kJ\cdot K^{-1}}\,.$$

16b On raisonne sur l'air de l'appartement pendant une transformation isobare de durée Δt.

Bilan d'enthalpie :

$$\Delta H \underset{\text{1er P}}{\underset{\uparrow}{=}} \mathcal{P}\,\Delta t \underset{\text{Joule}}{\underset{\uparrow}{=}} C\,\Delta T \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\Delta t = \frac{C\,\Delta T}{\mathcal{P}} = 600\,\mathrm{s} = 10\,\mathrm{min}\,.}$$

16c Quiconque est déjà rentré de vacances en plein hiver sait que ce résultat n'est pas crédible ! La capacité thermique de l'appartement inclut aussi celle des murs et du mobilier qui sont nettement supérieures à celles de l'air car il s'agit de solides. Les pertes thermiques sont évidemment à prendre en compte également, mais ce n'est pas le facteur principal.

17a Pour une fenêtre simple vitrage,

$$\boxed{G_{\mathrm{sv}} = U_{\mathrm{w,sv}} S = 15\,\mathrm{W\cdot K^{-1}}\,.}$$

Pour une fenêtre double vitrage,

$$\boxed{G_{\mathrm{dv}} = U_{\mathrm{w,dv}} S = 7{,}5\,\mathrm{W\cdot K^{-1}}\,.}$$

17b Les quatre fenêtres sont soumises à la même différence de température entre leurs deux faces : elles sont donc **montées en parallèle**.

17c Les conductances se somment en parallèle, donc $G_{\mathrm{tot}} = 4G_{\mathrm{fen}}$ soit

$$\boxed{G_{\mathrm{tot,sv}} = 60\,\mathrm{W\cdot K^{-1}} \qquad \text{et} \qquad G_{\mathrm{tot,dv}} = 30\,\mathrm{W\cdot K^{-1}}\,.}$$

Lorsque $\Delta T = 10\,\mathrm{K}$,

$$\boxed{\Phi_{\mathrm{sv}} = G_{\mathrm{tot,sv}}\,\Delta T = 600\,\mathrm{W} \qquad \text{et} \qquad \Phi_{\mathrm{dv}} = G_{\mathrm{tot,dv}}\,\Delta T = 300\,\mathrm{W}\,.}$$

17d La puissance thermique totale perdue vaut 5Φ, ce qui nécessite donc des convecteurs de puissance

$$\boxed{\mathcal{P}_{0,\mathrm{sv}} = 3\,\mathrm{kW} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{P}_{0,\mathrm{dv}} = 1{,}5\,\mathrm{kW}\,.}$$

> *L'hypothèse de l'énoncé est absurde : remplacer du simple par du double vitrage est évidemment sans aucun impact sur le reste de la puissance perdue au travers des murs ... Supposer que la puissance perdue par les vitres représente toujours 20 % du total n'a donc aucun sens.*

Pour comparer, il faut convertir cette puissance en énergie annuelle consommée par m^2 d'appartement,

$$E_{\text{sv}} = \frac{\mathcal{P}_{0,\text{sv}} \times \Delta t}{S_{\text{appt}}} = \frac{3 \times 4000}{100} = 120\,\mathrm{kW \cdot h \cdot m^{-2} \cdot an^{-1}}$$

et

$$E_{\text{dv}} = \frac{\mathcal{P}_{0,\text{dv}} \times \Delta t}{S_{\text{appt}}} = \frac{3 \times 4000}{100} = 60\,\mathrm{kW \cdot h \cdot m^{-2} \cdot an^{-1}}$$

Ces résultats semblent conformes au document 1 : ils sont meilleurs que la moyenne ... mais on étudie un appartement très performant énergétiquement.

18 Compte tenu de la valeur de ΔT, augmenter la température de l'appartement de 1 °C revient à augmenter ΔT de 10 %, et comme la consommation est proportionnelle à ΔT, **elle augmente de 10 % également**, et ce quel que soit le vitrage.

II - Transport du gaz naturel liquéfié

PT B 2021

20 Les résistances thermiques de l'isolant et de la cuve en métal sont associées en série, donnant une résistance équivalente

$$R = R_{\text{c}} + R_{\text{i}} = R_{\text{c}} + \frac{e}{4\pi\lambda_{\text{i}}\, b^2}$$

En raison de l'écart de température entre l'intérieur et l'extérieur de la cuve, le GNL à l'intérieur de la cuve reçoit un flux thermique

$$\Phi = \frac{T_{\text{a}} - T_0}{R} = \frac{T_{\text{a}} - T_0}{R_{\text{c}} + \dfrac{e}{4\pi\lambda_{\text{i}}\, b^2}}\,,$$

soit un transfert thermique total reçu pendant la durée du voyage

$$Q = \Phi\,\Delta t = \frac{T_{\text{a}} - T_0}{R}\,\Delta t = \frac{T_{\text{a}} - T_0}{R_{\text{c}} + \dfrac{e}{4\pi\lambda_{\text{i}}\, b^2}}\Delta t\,.$$

Sous l'effet de ce transfert thermique, une masse $M_{\text{év}}$ de GNL sa vaporise. Un bilan d'enthalpie appliqué au GNL pendant la durée Δt donne alors

$$\Delta H \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{=} Q \underset{\substack{\uparrow \\ \text{transf}}}{=} M_{\text{év}} L_{\text{v}}$$

et comme $M_{\text{év}} = x M_0$, on en déduit

$$x M_0 L_{\text{v}} = \frac{T_{\text{a}} - T_0}{R_{\text{c}} + \dfrac{e}{4\pi\lambda_{\text{i}}\, b^2}}\Delta t$$

$$x = \frac{(T_{\text{a}} - T_0)\Delta t}{M_0 L_{\text{v}}} \frac{1}{R_{\text{c}} + \dfrac{e}{4\pi\lambda_{\text{i}}\, b^2}}$$

$$\boxed{x = \frac{(T_{\text{a}} - T_0)\Delta t}{M_0 L_{\text{v}} R_{\text{c}}} \frac{1}{1 + \dfrac{e}{4\pi\lambda_{\text{i}}\, b^2\, R_{\text{c}}}}}$$

ce qui est bien de la forme demandée, avec

$$A = \frac{(T_{\text{a}} - T_0)\Delta t}{M_0 L_{\text{v}} R_{\text{c}}} \qquad \text{et} \qquad B = \frac{1}{4\pi\lambda_{\text{i}}\, b^2\, R_{\text{c}}}\,.$$

> *Le raisonnement tel que je le présente ci-dessus est sans aucun doute celui attendu par l'énoncé mais pose néanmoins un souci de rigueur sur la nature des transformations.*
>
> *En effet, si la cuve est hermétiquement fermée comme l'énoncé le laisse entendre, alors la vaporisation du GNL se traduit par une augmentation de pression dans la cuve ... et le premier principe ne peut*

> *plus s'écrire en enthalpie. Cependant, ce modèle est peu crédible : le stockage des fluides diphasés est toujours isobare et jamais isochore, car la hausse de pression induite par la vaporisation partielle du fluide devient vite conséquente, et peut rapidement conduire à une explosion de la cuve.*
>
> *Ainsi, l'autre modélisation contradictoire avec la précédente (mais également suggérée par l'énoncé !!) revient à considérer la vaporisation isobare, mais la vapeur produite sort de la cuve par un système de type soupape de régulation de pression. Dans ce cas, le GNL contenu dans la cuve n'est plus un système fermé ... et il faudrait appliquer alors le premier principe sous forme industrielle.*
>
> *Pour raccrocher les morceaux, on peut sans doute imaginer que, le taux de vaporisation étant faible, la fraction de fluide sortant de la cuve peut être négligée dans le bilan thermodynamique, permettant de considérer le contenu de la cuve tout à la fois comme un système fermé évoluant de manière isobare et isochore.*

21 On sait que $e > 0$ et $0 \leq x \leq 1$: on ne peut pas évaporer plus que le métal initialement présent dans la cuve. Un tracé indicatif est donné figure 2, l'échelle verticale n'étant pas respectée.

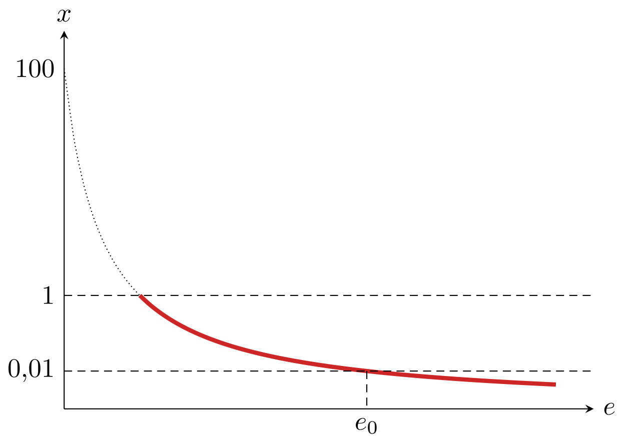

Figure 2 – Taux d'évaporation du GNL en fonction de l'épaisseur d'isolant.

22 On veut avoir $x < x_0$, soit

$$\frac{A}{1+Be} < x_0 \qquad \text{soit} \qquad A < (1+Be)x_0 \qquad \text{donc} \qquad A - x_0 < Bex_0$$

et finalement

$$\boxed{e > \frac{A - x_0}{x_0 B} = e_0\,.}$$

Numériquement,

$$e_0 \simeq \frac{100}{4 \cdot 10^4 \times 10^{-2}} = \frac{100}{400} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{e_0 = 25\,\mathrm{cm}\,.}$$

> *On peut alors confirmer la validité de l'hypothèse $e \ll b = 10\,\mathrm{m}$ utilisée pour calculer la résistance thermique de la mousse.*

23 Les constantes K_1 et K_2 doivent vérifier les conditions aux limites imposées à la cuve :

$$\begin{cases} T(r{=}b) \underset{\underset{\text{CL}}{\uparrow}}{=} T_0 \underset{\underset{\text{expr}}{\uparrow}}{=} K_1 + \dfrac{K_2}{b} \\[2ex] T(r{=}b+e) \underset{\underset{\text{CL}}{\uparrow}}{=} T_\mathrm{a} \underset{\underset{\text{expr}}{\uparrow}}{=} K_1 + \dfrac{K_2}{b+e} = K_1 + \dfrac{K_2}{b\left(1+\dfrac{e}{b}\right)} \simeq K_1 + \dfrac{K_2}{b}\left(1 - \dfrac{e}{b}\right) \end{cases}$$

On en déduit alors

$$T_\mathrm{a} = \underbrace{K_1 + \frac{K_2}{b}}_{=T_0} - \frac{K_2\,e}{b^2} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{K_2 = -\frac{(T_\mathrm{a} - T_0)b^2}{e}\,.}$$

24 La loi de Fourier s'écrit

$$\boxed{\vec{j}_{\text{th}} = -\lambda_{\text{i}} \, \overrightarrow{\text{grad}}\, T \,.}$$

25 Les conditions aux limites et le matériau de la cuve sont **invariants par toute rotation autour du centre de la cuve**, on peut légitimement faire l'hypothèse qu'il en est de même pour la température au sein de la paroi, qui ne dépend donc que de r. Les composantes du gradient selon $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_\varphi$ sont donc nulles, et il ne reste que

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, T = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\vec{u}_r \,.$$

> *La température ne dépendant que de r, la dérivée partielle peut être remplacée par une dérivée droite.*

26 Le flux thermique sortant d'une sphère de rayon $b < r < b + e$ s'écrit

$$\Phi = \iint_{\text{sphère}} \vec{j}_{\text{th}} \cdot \mathrm{d}S\vec{u}_r = -\lambda_{\text{i}} \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} \times 4\pi r^2 \,.$$

- **Première démarche possible :** Puisque $e \ll b$, on approxime $4\pi r^2 \simeq 4\pi b^2$ et on intègre par séparation de variables,

$$\Phi \int_b^{b+e} \mathrm{d}r = -4\pi b^2 \lambda_{\text{i}} \int_{T_0}^{T_{\text{a}}} \mathrm{d}T$$

d'où on déduit

$$\Phi\, e = -4\pi b^2 \lambda_{\text{i}} (T_{\text{a}} - T_0) \,.$$

Le flux étant orienté de l'intérieur vers l'extérieur de la cuve, la différence de température en convention récepteur s'écrit $T_0 - T_{\text{a}}$, ce qui permet d'identifier

$$\boxed{R_{\text{i}} = \frac{e}{4\pi\lambda_{\text{i}} b^2} \,.}$$

> *Remarquons que l'on retrouve l'expression de la résistance thermique d'une paroi plane de surface $4\pi b^2$: puisque $e \ll b$, les effets de la courbure de la couche isolante sont négligables.*

- **Deuxième démarche possible :** Avec l'expression de la température établie question 23, il vient

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\frac{K_2}{r^2} = \frac{(T_{\text{a}} - T_0) b^2}{e\, r^2}$$

et ainsi

$$\Phi = -4\pi\, \lambda_{\text{i}} \, \frac{(T_{\text{a}} - T_0) b^2}{e}$$

Le flux étant orienté de l'intérieur vers l'extérieur de la cuve, la différence de température en convention récepteur s'écrit $T_0 - T_{\text{a}}$. On réécrit alors

$$T_0 - T_{\text{a}} = \frac{e}{4\pi\, \lambda_{\text{i}}\, b^2} \Phi$$

d'où on identifie la résistance thermique de la mousse isolante

$$\boxed{R_{\text{i}} = \frac{e}{4\pi\, \lambda_{\text{i}}\, b^2} \,.}$$

> *Au vu de l'enchaînement des questions, il est probable que ce soit la deuxième démarche qui soit celle attendue ... néanmoins la première me semble plus systématique et plus naturelle.*