DM 13 – à rendre lundi 30 janvier *Correction*

# Bilans thermiques mésoscopiques

## Température dans le tunnel du Fréjus

*inspiré Mines-Ponts MP-PC-PSI 2016*

### A - Variations saisonnières de température au sein du tunnel

**1** Supposons que la température au sommet de la pointe Fréjus varie entre entre $-5\,°\mathrm{C}$ l'hiver et $15\,°\mathrm{C}$ l'été. Cela donne une température moyenne annuelle $T_0 = 5\,°\mathrm{C}$ et une amplitude de variation $\Theta = 10\,°\mathrm{C}$. Par ailleurs, une année dure

$$T = 365 \times 24 \times 3600 = 3{,}15 \cdot 10^7\,\mathrm{s}\,,$$

la pulsation vaut donc

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2{,}0 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}\,.$$

Le signe $-$ s'explique par le fait que la température est minimale en hiver, donc pour $t = 0$.

**2** L'équation de diffusion thermique tridimensionnelle s'écrit

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{D}\Delta T \qquad \text{avec} \qquad D = \frac{\kappa}{\mu c}\,,$$

où $\Delta$ est l'opérateur laplacien, qui est relié aux dérivées spatiales secondes de la température. Ainsi, l'équation aux dimensions en termes d'unités s'écrit sous la forme

$$\left[\frac{\partial T}{\partial t}\right] = [D]\,[\Delta T] \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{s}} = [D]\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{m}^2} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{[D] = \mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}\,.}$$

**3** $T_0$ représente la température *moyenne* à la surface, mais n'a aucun lien avec ses *variations* tout au long de l'année, il est donc logique que $\ell^\star$ n'en dépende pas. L'équation aux dimensions associée à la définition de $\ell^\star$ s'écrit

$$[\ell^\star] = [D]^n\,[\omega]^p\,[\Theta]^q \qquad \text{soit} \qquad \mathrm{m} = \frac{\mathrm{m}^{2n}}{\mathrm{s}^n} \times \frac{1}{\mathrm{s}^p} \times \mathrm{K}^q\,.$$

Les dimensions étant nécessairement les mêmes de part et d'autre de l'égalité, on en déduit

$$\begin{cases} 2n = 1 \\ n + p = 0 \\ q = 0 \end{cases} \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} n = 1/2 \\ p = -1/2 \\ q = 0 \end{cases}$$

et finalement

$$\boxed{\ell^\star = \sqrt{\frac{D}{\omega}}\,.}$$

**4** On trouve numériquement $\ell^\star = 80\,\mathrm{cm}$. Le tunnel se trouvant à une profondeur très largement supérieure à $80\,\mathrm{cm}$, il est normal que les variations saisonnières de température n'y soient pas perceptibles.

### B - Température d'origine géophysique

**5** Raisonner sur une tranche mésoscopique permet de la considérer à l'équilibre thermodynamique, et en particulier de définir sa température : c'est l'**hypothèse d'équilibre thermodynamique local**. L'épaisseur $\mathrm{d}z$ doit être très inférieure à toutes les longueurs macroscopiques caractéristiques du problème, ici $H$, $L$ et la profondeur à laquelle se trouve le tunnel, toutes de l'ordre du kilomètre ou plus ; mais très supérieure à la distance interatomique, de l'ordre de $10^{-10}$ m, qui caractérise l'échelle microscopique. Ainsi, toute valeur comprise entre quelques microns et quelques mètres peut convenir.

**6** Par la face située en $z$, le volume mésoscopique reçoit

$$\delta Q_{\text{reçu}} = \iint \vec{j}_Q(z) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}\, \mathrm{d}t = j_Q(z)\, S\, \mathrm{d}t$$

et par la face située en $z + \mathrm{d}z$ il cède

$$\delta Q_{\text{cédé}} = \iint \vec{j}_Q(z+\mathrm{d}z) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}\, \mathrm{d}t = j_Q(z+\mathrm{d}z)\, S\, \mathrm{d}t$$

Ainsi, au global, le transfert thermique algébrique reçu par conduction par le volume mésoscopique vaut

$$\delta Q_{\text{cond}} = \delta Q_{\text{reçu}} - \delta Q_{\text{cédé}} = (j_Q(z) - j_Q(z+\mathrm{d}z))\, S\, \mathrm{d}t\,.$$

Par un développement limité, on en déduit

$$\boxed{\delta Q_{\text{cond}} = -\frac{\mathrm{d}j_Q}{\mathrm{d}z}\, S\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}t\,.}$$

**7** La puissance libérée par les désintégrations radioactives au sein du volume mésoscopique vaut

$$P = \mathcal{P}\, S\, \mathrm{d}z = \mathcal{P}_0\, \mathrm{e}^{-z/H}\, S\, \mathrm{d}z$$

si bien que le transfert thermique reçu par radioactivité s'écrit

$$\delta Q_{\text{rad}} = P\, \mathrm{d}t \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\delta Q_{\text{rad}} = \mathcal{P}_0\, \mathrm{e}^{-z/H}\, S\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}t\,.}$$

**8** Procédons à un bilan d'enthalpie pour le volume mésoscopique pendant la durée $\mathrm{d}t$ :

$$\mathrm{d}H \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{=} \delta Q_{\text{cond}} + \delta Q_{\text{rad}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{RP}}}{=} 0\,,$$

et ainsi

$$\frac{\mathrm{d}j_Q}{\mathrm{d}z}\, \cancel{S\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}t} = \mathcal{P}_0\, \mathrm{e}^{-z/H}\, \cancel{S\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}t} \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}j_Q}{\mathrm{d}z} = \mathcal{P}_0\, \mathrm{e}^{-z/H}\,,$$

ce que l'on intègre par séparation des variables en utilisant la condition limite au niveau de l'interface avec le manteau :

$$\int_{-j_m}^{j_Q(z)} \mathrm{d}j_Q = \mathcal{P}_0 \int_L^z \mathrm{e}^{-z/H}\, \mathrm{d}z$$

$$j_Q(z) + j_m = \mathcal{P}_0 \left[-H\, \mathrm{e}^{-z/H}\right]_L^z$$

$$\boxed{j_Q(z) = \mathcal{P}_0 H \left(\mathrm{e}^{-L/H} - \mathrm{e}^{-z/H}\right) - j_{\mathrm{m}}\,.}$$

**9** D'après la loi de Fourier,

$$\vec{j}_Q = -\kappa\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, T \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} = -\frac{1}{\kappa} j_Q = \frac{\mathcal{P}_0 H}{\kappa}\left(\mathrm{e}^{-z/H} - \mathrm{e}^{-L/H}\right) + \frac{j_{\mathrm{m}}}{\kappa}\,.$$

Procédons là encore par séparation de variables, en utilisant cette fois la condition limite au niveau de la surface, où l'on considère la température égale à sa valeur moyenne annuelle $T_0$,

$$\int_{T_0}^{T(z)} \mathrm{d}T = \frac{\mathcal{P}_0 H}{\kappa} \int_0^z \mathrm{e}^{-z/H} \mathrm{d}z + \frac{j_{\mathrm{m}} - \mathcal{P}_0 H\, \mathrm{e}^{-L/H}}{\kappa} \int_0^z \mathrm{d}z$$

$$T(z) - T_0 = \frac{\mathcal{P}_0 H}{\kappa} \left[-H\, \mathrm{e}^{-z/H}\right]_0^z + \frac{j_{\mathrm{m}} - \mathcal{P}_0 H\, \mathrm{e}^{-L/H}}{\kappa} z$$

$$T(z) = T_0 + \frac{\mathcal{P}_0 H}{\kappa} H \left(1 - \mathrm{e}^{-z/H}\right) + \frac{j_{\mathrm{m}} - \mathcal{P}_0 H\, \mathrm{e}^{-L/H}}{\kappa} z$$

ce qui est bien le résultat donné par l'énoncé,

$$\boxed{T(z) = \frac{j_\mathrm{m} - H\mathcal{P}_0\,\mathrm{e}^{-L/H}}{\kappa}\,z + \frac{H^2\mathcal{P}_0}{\kappa}\left(1 - \mathrm{e}^{-z/H}\right) + T_0\,.}$$

**10** En reprenant toutes les valeurs numériques données aux divers endroits de l'énoncé, $T_0 = 5\,°\mathrm{C}$ comme dans la première partie, et $z = 1{,}7\,\mathrm{km}$, on trouve

$$\boxed{T(z\!=\!1{,}7\,\mathrm{km}) = 38\,°\mathrm{C}\,,}$$

ce qui est supérieur aux 30 °C annoncés en introduction. Plusieurs hypothèses permettent de l'expliquer, par exemple l'influence du relief qui est loin d'être plat, un choix peut être discutable de la température moyenne $T_0$ qui a beaucoup d'influence sur le résultat, ou encore l'hypothèse de roche homogène qui peut être à remettre en cause.

**11** Le flux thermique surfacique en surface est

$$\boxed{j_Q(z\!=\!0) = \mathcal{P}_0 H\left(\mathrm{e}^{-L/H} - 1\right) - j_\mathrm{m} = -0{,}060\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}\,.}$$

Comme il est négatif avec un sens conventionnel vers le sol (sens de l'axe $z$), c'est qu'il est réellement dirigé du sol vers l'atmosphère. Ainsi, c'est la Terre qui réchauffe l'atmosphère, et non pas l'inverse.