



BLAISE PASCAL
PT 2022-2023

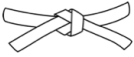



DM 13 – à rendre lundi 30 janvier

Bilans thermiques mésoscopiques

Travailler avec vos cours et TD ouverts est **chaudement recommandé** : un DM est un entraînement, pas une évaluation. En cas de besoin, **n'hésitez pas à me poser des questions**, à la fin d'un cours ou sur le serveur de la classe.



Flasher ce code pour accéder au corrigé

Ceinture		Travail à réaliser
	Ceinture blanche	Questions 6 à 11 – facultatif
	Ceinture jaune	Partie B – facultatif
	Ceinture rouge	En entier – facultatif
	Ceinture noire	En entier – facultatif

Température dans le tunnel du Fréjus

inspiré Mines-Ponts MP-PC-PSI 2016

Le tunnel routier du Fréjus relie la vallée de l'Arc, en France, au val de Suse, en Italie. Long de 13 km environ, le tunnel passe sous le col de Fréjus dans les Alpes cottiennes. La pointe Fréjus culmine à une altitude de 2934 m. La température au cœur du tunnel demeure constante tout au long de l'année, de l'ordre de 30 °C, ce que nous allons interpréter. Compte tenu de la longueur du tunnel, on néglige l'effet des entrées d'air, et on suppose la température dans le tunnel égale à celle de la roche environnante.

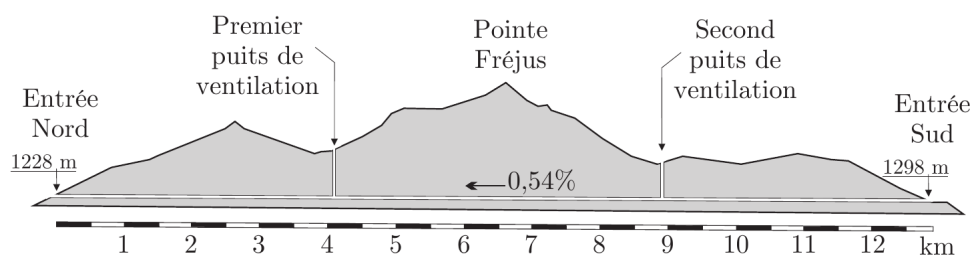


Figure 1 – Schéma d'ensemble du tunnel du Fréjus.

A - Variations saisonnières de température au sein du tunnel

Commençons par interpréter la constance de la température au cœur du tunnel en toute saison. Diverses observations montrent que les fluctuations de la température atmosphérique ne se font ressentir qu'au voisinage de la surface du sol. On cherche à estimer par analyse dimensionnelle l'épaisseur caractéristique d'atténuation de ces variations. La croûte terrestre a une conductivité thermique $\kappa = 3,0 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, une masse volumique $\mu = 2,7 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et une capacité thermique massique $c = 8,5 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$. L'origine des temps étant prise au 1^{er} janvier, on modélise les variations de température de surface par

$$T_s(t) = T_0 - \Theta \cos(\omega t).$$

- 1 - Proposer des ordres de grandeur pertinents pour T_0 , Θ et ω . Justifier le signe – dans l'expression donnée.
- 2 - Rappeler sans démonstration l'équation de la diffusion thermique tridimensionnelle. Définir la diffusivité de la roche en fonction de ses caractéristiques thermodynamiques, et retrouver sa dimension.

3 - On note ℓ^* la longueur caractéristique sur laquelle les variations saisonnières de température s'amortissent dans le sol. Justifier brièvement que ℓ^* ne dépend pas de T_0 puis déterminer les trois exposants n , p et q permettant d'écrire cette longueur caractéristique sous la forme

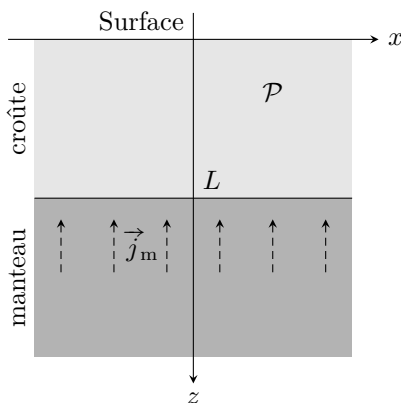
$$\ell^* = D^n \omega^p \Theta^q.$$

4 - Conclure.

B - Température d'origine géophysique

On se place à la verticale de la pointe du Fréjus. On utilise un modèle unidimensionnel semi-infini de la croûte terrestre, considérée plane et horizontale, dont l'origine $z = 0$ se trouve au sommet de la pointe. Comme justifié dans la partie précédente, on se place en régime permanent : les grandeurs physiques sont supposées ne dépendre que de z .

Au niveau des Alpes, l'épaisseur de la croûte terrestre est $L = 45$ km. Les roches granitiques qui la composent contiennent des éléments radioactifs, comme l'uranium, le thorium et le potassium. La chaleur produite par ces éléments radioactifs est directement proportionnelle à leur concentration.



Un modèle couramment utilisé par les géophysiciens consiste à supposer que cette concentration décroît exponentiellement avec la profondeur, de sorte que la puissance volumique dégagée peut s'écrire

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 e^{-z/H} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathcal{P}_0 = 2,5 \mu\text{W} \cdot \text{m}^{-3} \\ H = 10 \text{ km} \end{cases}$$

Par ailleurs, la croûte terrestre repose sur le manteau, à la fois plus dense et plus chaud. Au niveau de l'interface entre la croûte et le manteau, celui-ci génère un flux surfacique uniforme et constant

$$\vec{j}_m = -j_m \vec{e}_z \quad \text{avec} \quad j_m = 35 \text{ mW} \cdot \text{m}^{-2}.$$

5 - On raisonne sur un volume mésoscopique de roche, compris entre z et $z + dz$, de surface S . Justifier le choix de ce système et donner un ordre de grandeur de dz .

6 - Exprimer le transfert thermique δQ_{cond} échangé par conduction par le volume mésoscopique pendant une durée infinitésimale dt , en fonction notamment du vecteur densité de flux thermique noté $\vec{j}_Q = j_Q \vec{e}_z$.

7 - Exprimer le transfert thermique effectif δQ_{rad} reçu par le volume mésoscopique en raison des désintégrations radioactives pendant la même durée dt .

8 - À partir des questions précédentes, établir l'expression de $j_Q(z)$.

9 - En déduire que

$$T(z) = \frac{j_m - H\mathcal{P}_0 e^{-L/H}}{\kappa} z + \frac{H^2\mathcal{P}_0}{\kappa} (1 - e^{-z/H}) + T_0.$$

10 - Calculer numériquement la température au centre du tunnel. Commenter le résultat trouvé.

11 - Calculer le flux thermique surfacique à la surface du sol : est-ce l'atmosphère qui réchauffe le sol ou l'inverse ?