



# OEM dans le vide

## Clé de voiture radiocommandée

**1** L'onde émise par la clé est harmonique et se déplace dans une direction bien déterminée de la clé vers la voiture : il est donc raisonnable de la modéliser par une OPPH se propageant dans le sens des  $x$  croissants. La constante  $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  est sa célérité, c'est-à-dire sa vitesse de propagation.

**2** Cf. cours :

$$\vec{\Delta} \vec{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}.$$

**3** Avec la forme d'onde donnée, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= -2\pi f_0 E_0 \sin \left[ 2\pi f_0 \left( t - \frac{x}{c} \right) \right] \vec{e}_z & \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= -4\pi^2 f_0^2 E_0 \cos \left[ 2\pi f_0 \left( t - \frac{x}{c} \right) \right] \vec{e}_z \\ \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} &= +\frac{2\pi f_0}{c} E_0 \sin \left[ 2\pi f_0 \left( t - \frac{x}{c} \right) \right] \vec{e}_z & \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} &= -\frac{4\pi^2 f_0^2}{c^2} E_0 \cos \left[ 2\pi f_0 \left( t - \frac{x}{c} \right) \right] \vec{e}_z \end{aligned}$$

En réinjectant dans l'équation de d'Alembert,

$$-\frac{4\pi^2 f_0^2}{c^2} E_0 \cos \left[ 2\pi f_0 \left( t - \frac{x}{c} \right) \right] \vec{e}_z + \varepsilon_0 \mu_0 4\pi^2 f_0^2 E_0 \cos \left[ 2\pi f_0 \left( t - \frac{x}{c} \right) \right] \vec{e}_z = 0$$

ce qui donne en simplifiant

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}.$$

**4** Utilisons l'équation de Maxwell-Faraday,

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

avec pour l'onde donnée

$$\text{rot } \vec{E} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ E_z(x, t) \end{bmatrix} = -\frac{\partial E_z}{\partial x} \vec{e}_y = -\frac{2\pi f_0}{c} E_0 \sin \left[ 2\pi f_0 \left( t - \frac{x}{c} \right) \right] \vec{e}_y$$

On en déduit donc

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = +\frac{2\pi f_0}{c} E_0 \sin \left[ 2\pi f_0 \left( t - \frac{x}{c} \right) \right] \vec{e}_y$$

et par intégration par rapport au temps

$$\vec{B}(x, t) = \frac{2\pi f_0}{c} E_0 \times \left( -\frac{1}{2\pi f_0} \cos \left[ 2\pi f_0 \left( t - \frac{x}{c} \right) \right] + f(x) \right) \vec{e}_y$$

Or on se limite à l'étude de champs ondulatoires, dépendant simultanément de  $x$  et  $t$ , ce qui permet de justifier que  $f(x) = 0$ . Finalement,

$$\vec{B}(x, t) = -\frac{E_0}{c} \cos \left[ 2\pi f_0 \left( t - \frac{x}{c} \right) \right] \vec{e}_y.$$

L'énoncé veut vous faire utiliser l'équation de Maxwell-Faraday, histoire de s'y entraîner, mais de façon générale c'est bien la relation de structure qu'il faut privilégier ... et ici elle peut servir de test de vraisemblance efficace.

5 Par définition,

$$\begin{aligned}\vec{R} &= \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \\ &= -\frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2 \left[ 2\pi f_0 \left( t - \frac{x}{c} \right) \right] (\vec{e}_z \wedge \vec{e}_y) \\ \vec{R} &= \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2 \left[ 2\pi f_0 \left( t - \frac{x}{c} \right) \right] \vec{e}_x\end{aligned}$$

Physiquement,  $\vec{R}$  est le **vecteur densité de flux d'énergie électromagnétique** : son flux au travers d'une surface  $\mathcal{S}$  est la puissance électromagnétique rayonnée au travers de cette surface,

$$\mathcal{P}_{\text{ray}} = \iint_{\mathcal{S}} \vec{R} \cdot \vec{dS}.$$

La puissance rayonnée s'exprime en W et  $dS$  en  $\text{m}^2$ , donc

$$[\vec{R}] = \text{W} \cdot \text{m}^{-2}.$$

6 Puisque  $\langle \cos^2(\omega t + \varphi) \rangle = 1/2$  quels que soient  $\omega$  et  $\varphi$ , on en déduit

$$\langle \vec{R} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{e}_x.$$

L'onde se propage dans le sens des  $x$  croissants et transporte de l'énergie selon  $+\vec{e}_x$ , ce qui est cohérent.

7 Dans ces nouvelles hypothèses, les champs et donc le vecteur de Poynting ne dépendent que de la distance  $r$  à la clé, et le vecteur de Poynting est dirigé selon  $\vec{e}_r$ . La puissance moyenne rayonnée au travers d'une sphère de rayon  $r$  s'écrit donc

$$\langle \mathcal{P}_{\text{ray}}(r) \rangle = \iint_{\text{sphère}} \langle \vec{R} \rangle \cdot \vec{dS} = \langle R_r(r, t) \rangle \times 4\pi r^2.$$

Or la puissance ne fait que s'étaler dans l'espace, sans aucun phénomène d'absorption, donc

$$\forall r, \quad \langle \mathcal{P}_{\text{ray}}(r) \rangle = P_0$$

d'où on déduit

$$\langle \vec{R} \rangle = \frac{P_0}{4\pi r^2} \vec{e}_r.$$

8 En supposant que l'onde sphérique a localement la même structure qu'une onde plane, l'expression précédente de  $\langle \vec{R} \rangle$  se généralise, ce qui donne

$$\frac{E_0^2}{2\mu_0 c} = \frac{P_0}{4\pi r^2} \quad \text{soit} \quad E_0(r) = \sqrt{\frac{\mu_0 c P_0}{2\pi r^2}}.$$

9 Pour qu'un phénomène d'induction ait lieu dans la spire, il faut que le flux magnétique au travers de la spire varie. Pour cela, la situation optimale est que la spire soit orthogonale au champ magnétique de l'onde, voir figure 1, mais une inclinaison modérée n'est heureusement pas pénalisante. Seule une situation où le champ magnétique serait inclus dans le plan de la spire ne permet pas la détection.

10 Le flux magnétique au travers de la spire s'écrit (au signe près lié à l'orientation)

$$\phi = \iint \vec{B} \cdot \vec{dS} = \frac{E_0(d)}{c} \cos \left[ 2\pi f_0 \left( t - \frac{d}{c} \right) \right] \times a^2$$

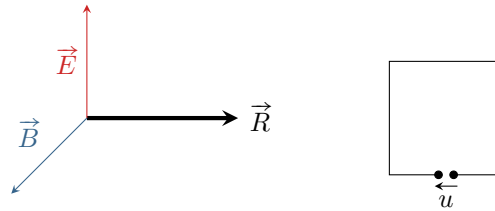


Figure 1 – Position relative de la spire de détection dans la situation optimale.

et avec la loi de Faraday, toujours au signe près,

$$u = -\frac{d\phi}{dt} = \frac{2\pi f_0 E_0(d) a^2}{c} \sin \left[ 2\pi f_0 \left( t - \frac{d}{c} \right) \right]$$

En reprenant l'expression de l'amplitude  $E_0(d)$ , on obtient

$$u = \frac{2\pi f_0 a^2}{c} \sqrt{\frac{\mu_0 c P_0}{2\pi d^2}} \sin \left[ 2\pi f_0 \left( t - \frac{d}{c} \right) \right]$$

ce qui se simplifie en

$$u = f_0 a^2 \sqrt{\frac{2\pi\mu_0 P_0}{cd^2}} \sin \left[ 2\pi f_0 \left( t - \frac{d}{c} \right) \right].$$

Utiliser une bobine au lieu d'une spire unique permet de multiplier le flux, et donc la tension  $u$ , par le nombre de spires, et ce faisant d'obtenir un signal de plus grande amplitude.

**11** Le taux de transmission d'information est de 2000 bits par seconde, soit une durée d'émission pour un bit de

$$\tau_0 = \frac{1}{2000} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ s.}$$

Le nombre  $N$  de périodes  $T_0$  de l'onde porteuse est tel que

$$\tau_0 = NT_0 \quad \text{soit} \quad N = \frac{\tau_0}{T_0} = f_0 \tau_0 \simeq 216\,000.$$

**12** La fréquence varie de  $2\Delta f$  entre l'émission d'un 0 et celle d'un 1, ce qui donne une variation relative par rapport à la valeur moyenne de

$$\frac{2\Delta f}{f_0} = 1,4 \cdot 10^{-4} = 0,01 \text{ \%}.$$

Cette variation est **absolument indétectable** sur l'amplitude du signal : en imaginant un signal d'amplitude 1 V, la variation d'amplitude entre un 0 et 1 serait de 0,1 mV, ce qui est très inférieur au bruit électronique typique, de l'ordre de quelques mV.

**13** En considérant une acquisition sur une durée  $\tau_0$ , la résolution du spectre calculé vaut  $1/\tau_0 = 2$  kHz, ce qui est nettement inférieur à l'écart en fréquence  $2\Delta f = 60$  kHz séparant les 0 et les 1. Cependant, cela suppose que le début de l'acquisition est parfaitement synchronisée avec le début de l'émission du bit que l'on souhaite identifier ... sans quoi l'acquisition contient deux « fragments » de bits, potentiellement de fréquences différentes, et dont il n'est plus possible de distinguer l'ordre d'émission.