



# Interféromètre de Michelson

## Biométrie de l'œil par interférométrie

PT A 2019

### B.1 - Obtention d'interférences

#### B.1.1 - Longueur de cohérence temporelle d'une source lumineuse

**1.a** **Cours** Une onde lumineuse quasi-monochromatique est constituée d'une succession de trains d'ondes. Entre deux trains d'onde consécutif, l'amplitude et la pulsation sont inchangées mais la phase subit une discontinuité aléatoire, comme schématisé figure 1. En pratique, la durée  $\tau_c$  d'un train d'onde est très supérieure à la période  $T_0$  de l'onde.

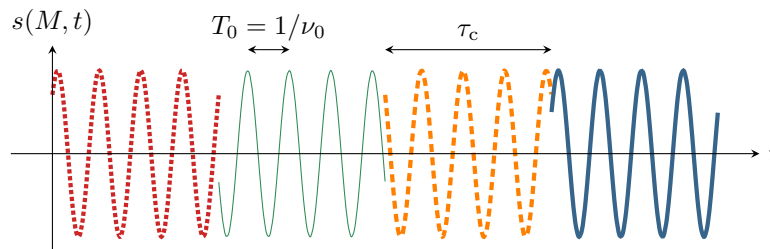


Figure 1 – Modèle des trains d'ondes.

**1.b** **Cours** Le temps de cohérence d'un laser est de l'ordre de  $10^{-9}$  s.

**1.c** **Cours** La largeur en fréquence  $\Delta\nu$  d'une raie spectrale est reliée à sa largeur en longueur d'onde  $\Delta\lambda$  par la dérivée de la relation de dispersion  $\nu = c/\lambda$ ,

$$\Delta\nu = \left| \frac{d\nu}{d\lambda} \right| \Delta\lambda = \frac{c}{\lambda_0^2} \Delta\lambda$$

Le temps de cohérence étant défini par  $\tau_c = 1/\Delta\nu$ , on en déduit

$$\tau_c = \frac{\lambda_0^2}{c \Delta\lambda} = 4,5 \cdot 10^{-14} \text{ s.}$$

**1.d** **Cours** La longueur de cohérence est la longueur d'un train d'onde, soit

$$L_c = c \tau_c = 13 \mu\text{m.}$$

**1.e** Une source purement monochromatique aurait une largeur  $\Delta\lambda = 0$  donc un temps et une longueur de cohérence infinis.

#### B.1.2 - Interférences de deux ondes

**2.a** **Cours** Par définition,

$$\delta = (S_2P) - (S_1P) = nd_2 - nd_1.$$

**2.b** **Cours** Utilisons les représentations complexes  $\underline{a}_1$  et  $\underline{a}_2$  des deux ondes issues de  $S_1$  et  $S_2$ . Les ondes étant cohérentes et en phase, on a au point  $P$

$$\underline{a}_1(P, t) = A_1 e^{i(\omega t - k_0 n d_1)} \quad \text{et} \quad \underline{a}_2(P, t) = A_2 e^{i(\omega t - k_0 n d_2)}$$

où l'on pose  $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ . L'onde totale vaut donc

$$\underline{a}(P, t) = \underline{a}_1(P, t) + \underline{a}_2(P, t)$$

et on en déduit l'intensité

$$\begin{aligned} I &= |\underline{a}_1 + \underline{a}_2|^2 \\ &= |\underline{a}_1|^2 + |\underline{a}_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(\underline{a}_1 \underline{a}_2^*) \\ &= I_1 + I_2 + 2 \operatorname{Re}(A_1 A_2 e^{i(\omega t - k_0 n d_1)} e^{-i(\omega t - k_0 n d_2)}) \\ &= I_1 + I_2 + 2 A_1 A_2 \operatorname{Re}(e^{i k_0 n (d_2 - d_1)}) \\ &= I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} \cos(k_0 n (d_2 - d_1)) \end{aligned}$$

$$I = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta\right)$$

**2.c** **Cours** Par identification, le déphasage  $\Phi$  vaut

$$\Phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta.$$

## B.II - Interféromètre de Michelson réglé en lame d'air

**1** **Cours** Raisonnons sur le schéma équivalent de la figure 2, en notant  $S'$  le symétrique de la source par rapport à la lame séparatrice  $Sp$  et  $\widetilde{M}$  le symétrique du miroir  $M$  par rapport à cette même séparatrice. Les sources secondaires  $S_1$  et  $S_2$  dont sont issues les ondes 1 et 2 sont alors les images de  $S'$  par les miroirs  $M$  et  $\widetilde{M}$ . L'observation se faisant dans le plan focal de la lentille convergente, les rayons qui interfèrent sortent de l'interféromètre parallèles entre eux.

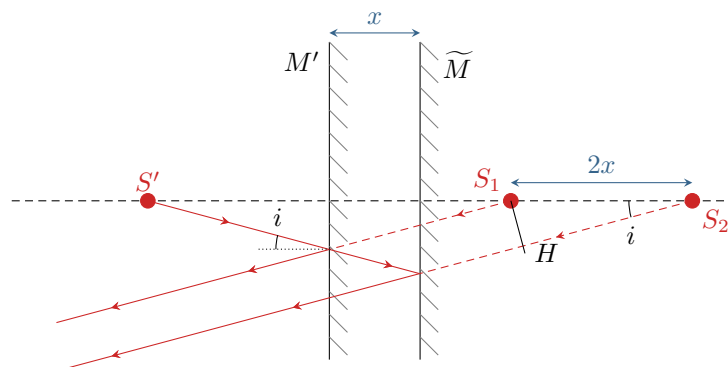


Figure 2 – Schéma équivalent de l'interféromètre.

Si la source était en  $M$ , alors d'après le théorème de Malus  $H$  et  $S_1$  appartiendraient au même plan d'onde. Avec le principe de retour inverse, on en déduit

$$(S_1 M) = (H M).$$

Ainsi, la différence de marche vaut simplement

$$\delta = (S_2 H) = 2x n_a \cos i$$

avec  $n_a$  l'indice optique de l'air et  $i$  l'angle d'incidence des rayons sur les miroirs.

**2** **Cours** On constate que le dispositif est invariant par rotation autour de l'axe  $(S_1 S_2)$ , si bien qu'on observe sur l'écran une **alternance d'anneaux sombres et brillants** centrés sur cet axe.

**3** **Cours** Il faut tourner la vis permettant de chariotter le miroir  $M$  en faisant **diminuer le nombre d'anneaux visibles**, jusqu'à ne plus en observer du tout (teinte uniforme sur l'écran). Au cours de l'opération, on observe des anneaux rentrer par le contour extérieur de la figure d'interférences et disparaître par le centre.

On peut retrouver rapidement le fait que le rayon des anneaux diminue progressivement en allant jusqu'au bout du tracé des rayons dans la lentille. On constate alors que le rayon d'un anneau est relié à l'angle d'incidence  $i$  par  $r = f' \tan i$ . En suivant un anneau, c'est-à-dire en raisonnant à  $p = \delta/\lambda = \text{cte}$ , on voit alors qu'une diminution de  $x$  entraîne une augmentation de  $\cos i$  d'où une diminution de  $i$  et donc de  $r$ . Le rayon de l'anneau diminue donc au cours de la manipulation, jusqu'à ce qu'il s'annule c'est-à-dire que l'anneau disparaisse. Le calcul exhaustif du rayon des anneaux en fonction de  $p$  est fait dans le cours.

### B.III - Mesure de position

**1.a** La source étant ponctuelle et au foyer d'une lentille convergente, on a simplement des faisceaux de rayons parallèles aux axes du système, qui convergent uniquement au point  $O$ . Schéma à faire.

**1.b** Dans cette configuration, les rayons arrivent tous en incidence normale sur les miroirs donc  $i = 0$  et l'épaisseur de la lame d'air vaut  $x - x_1$ , on a donc

$$\delta = 2n_a(x - x_1).$$

**1.c** **Cours** Par définition  $p = \delta/\lambda$ .

**1.d** L'ordre 0 est atteint pour  $x = x_1$ , si on sait repérer cet ordre et mesurer la valeur de  $x$  correspondante alors on peut en déduire  $x_1$ .

#### B.III.2 - Cas où la source est parfaitement monochromatique

**2.a** Avec la célèbre « relation c » (qui s'appelle formule de Fresnel!!), on obtient

$$I(O) = 2I_0 \left[ 1 + \cos \left( \frac{4\pi}{\lambda_0} n_a(x - x_1) \right) \right].$$

**2.b.α** Les positions  $x_m$  des maxima d'intensité sont tels que

$$\frac{4\pi}{\lambda_0} n_a(x_m - x_1) = 2m\pi \quad \text{soit} \quad x_m = x_1 + m \frac{\lambda_0}{2n_a}.$$

**2.b.β** Voir figure 3.

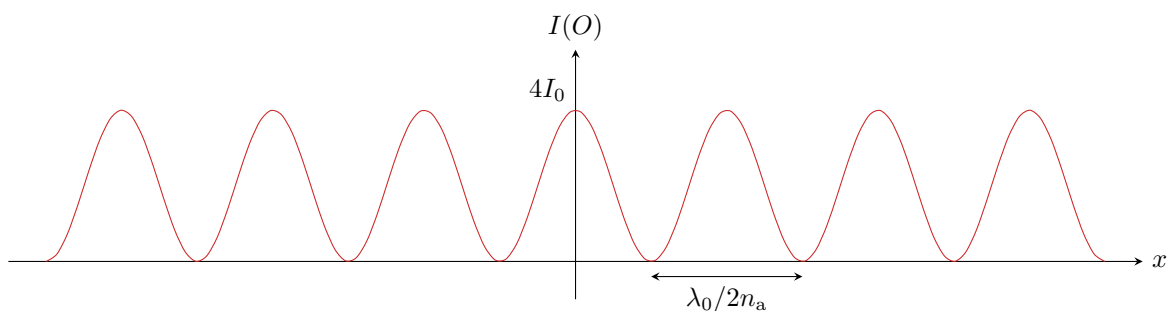


Figure 3 – Intensité lumineuse au centre des anneaux pour une source parfaitement monochromatique.

**2.c** La fonction est parfaitement périodique, il est donc impossible de distinguer la frange d'ordre 0 de n'importe quelle autre frange donnant un ordre entier.

#### B.III.3 - La source S est à faible cohérence temporelle

**3.a** Comme précédemment, la position du miroir mobile donnant l'ordre 0 et  $x_0 = x_1$ . 0 étant un entier (...) il s'agit donc d'une frange brillante, d'intensité maximale.

**3.b** Il y a interférences pour

$$|\delta| < L_c \quad \text{soit} \quad 2n_a |x - x_1| < L_c$$

ou encore pour des positions  $x$  telles que

$$x_1 - \frac{L_c}{2n_a} < x < x_1 + \frac{L_c}{2n_a}.$$

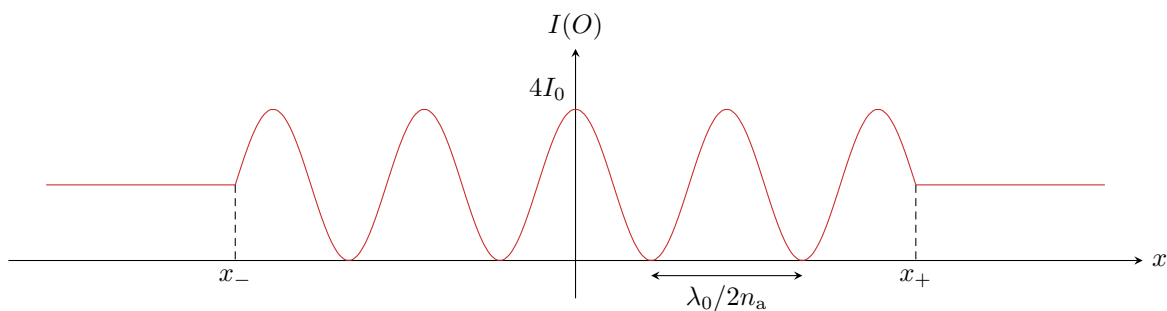
**3.c** D'après la question 2.b.α, la distance  $x$  varie de  $\lambda_0/2n_a$  entre deux maxima d'intensité successifs. Le nombre de maxima d'intensité observables est donc

$$N = \left\lfloor \frac{x_+ - x_-}{\lambda_0/2n_a} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{L_c/n_a}{\lambda_0/2n_a} \right\rfloor$$

soit finalement

$$N = \left\lfloor \frac{2L_c}{\lambda_0} \right\rfloor = 5.$$

**3.d** La courbe a l'allure d'un cosinus « tronqué » avec seulement 5 oscillations, voir figure 4. En dehors de l'intervalle  $[x_-, x_+]$ , il n'y a plus d'interférences observables : l'écran est donc partout égal à  $2I_0$  ... mais il n'est pas nul ! Pas d'interférences veut dire contraste nul, à distinguer de frange sombre.



**Figure 4 – Intensité lumineuse au centre des anneaux pour une source parfaitement monochromatique.**

**3.e.α** La raison est la même que précédemment : tous les maxima d'intensité étant identiques, il n'est pas possible de distinguer l'ordre 0 des autres ordres entiers.

**3.e.β** Par définition, le milieu de l'intervalle  $[x_-, x_+]$  se trouve

$$x_{\text{mil}} = \frac{x_+ + x_-}{2} = x_1 = x_0.$$

Un ordre de grandeur de l'incertitude peut être donné par

$$\Delta x = x_+ - x_{\text{mil}} = \frac{L_c}{2n_a}$$

en réutilisant le résultat de la question 3.b.

## B.IV - Application à la biométrie de l'œil

**1** La position du point  $A$  est prise comme référence  $x = 0$ , il y a donc égalité des chemins optiques dans les deux voies avant ce point, c'est-à-dire entre le séparatrice et  $A$  d'une part et entre la séparatrice et la position de référence repérée en traits pointillés d'autre part. Au delà de ce point, le rayon 1 arrivant sur l'œil parcourt une distance  $2D_c$  dans un milieu d'indice  $n_c$ , alors que le rayon 2 arrivant sur le miroir parcourt une distance  $2x$  dans l'air d'indice  $n_a$ . Ainsi,

$$\delta_{B/2} = 2n_a x - 2n_c D_c.$$

**2** Le maximum de contraste relevé en  $x_B$  correspond à une différence de marche nulle, soit

$$2n_a x_B - 2n_c D_c = 0 \quad \text{d'où} \quad x_B = \frac{n_c}{n_a} D_c.$$

**3** Je ne suis pas sûr de bien comprendre la question ? On a immédiatement

$$D_c = \frac{n_a}{n_c} x_B.$$

**B.V - Enregistrement**

**a** Entre P1 et P2 se trouve la cornée; entre P2 et P3 l'humeur aqueuse; entre P3 et P4 le cristallin; entre P4 et P5 l'humeur vitrée et enfin entre P5 et P6 la rétine.

**b** **Difficile** En généralisant la question 3 de la partie précédente, on comprend que l'épaisseur  $D$  d'une partie de l'œil est reliée à son indice  $n$  et au déplacement  $\Delta x$  du miroir entre les positions montrant les deux interfaces par la relation

$$D = \frac{n_a}{n} \Delta x = \frac{\Delta x}{n}.$$

L'épaisseur donnée de l'humeur vitrée permet d'étalonner l'axe des abscisses de la figure 10, dont l'échelle n'est pas donné. Ainsi, en notant V les grandeurs relatives à l'humeur vitreuse et C celles du cristallin,

$$\frac{\Delta x_V}{\Delta x_{V,lu}} = \frac{\Delta x_C}{\Delta x_{C,lu}}$$

d'où on déduit

$$\Delta x_C = \frac{\Delta x_V}{\Delta x_{V,lu}} \Delta x_{C,lu} = \frac{\Delta x_{C,lu}}{\Delta x_{V,lu}} n_V D_V.$$

Finalement, l'épaisseur du cristallin est donnée par

$$D_C = \frac{n_V}{n_C} \frac{\Delta x_{C,lu}}{\Delta x_{V,lu}} D_V$$

Numériquement, il vient

$$D_C = \frac{1,344}{1,406} \times \frac{2,5}{9,7} \times 16,14$$

Avec une calculatrice, on en conclut

$$D_c = 4,0 \text{ mm}.$$