



BLAISE PASCAL
PT 2023-2024





DM 8 – à rendre lundi 27 novembre

Révisions de mécanique

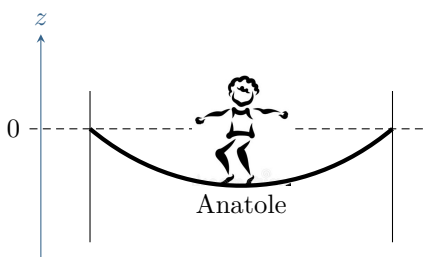
Travailler avec vos cours et TD ouverts est **chaudement recommandé** : un DM est un entraînement, pas une évaluation. Réfléchir ensemble est une bonne idée, mais le travail de rédaction doit être individuel. En cas de besoin, **n'hésitez pas à me poser des questions**, à la fin d'un cours, par mail ou via l'ENT.



Flasher ce code pour accéder au corrigé

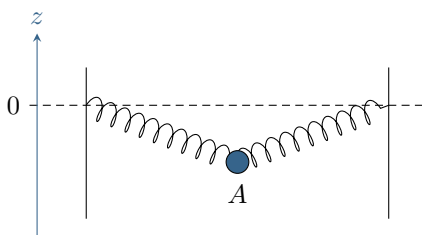
Ceinture		Travail à réaliser
	Ceinture blanche	Questions 6, 7 et 8
	Ceinture jaune	Questions 6 à 11
	Ceinture rouge	Questions 1 à 5 puis 9 à 11
	Ceinture noire	Questions 1 à 5 puis 9 à 14

Trampoline



Pour s'occuper quand il fait beau, Anatole passe une bonne partie de ses journées à sauter sur le trampoline de son jardin. Entre deux acrobaties, il lui arrive parfois de décoller sans élan lorsqu'il fait simplement osciller le tapis du trampoline. Cet exercice a pour but d'étudier la (les) condition(s) permettant ce décollage et le saut qui s'en suit. Pour simplifier, on suppose qu'Anatole se trouve parfaitement au centre du trampoline et on le modélise par un point matériel A de masse m . On note z l'ordonnée du point A .

A - Le trampoline oscille



Le but de cette première partie est de déterminer l'équation horaire $z(t)$ lorsque Anatole oscille avec le tapis du trampoline. On modélise le trampoline par deux ressorts identiques, de même longueur à vide ℓ_0 et de même raideur k , attachés au point A . Le tapis de trampoline étant tendu, la longueur à vide des ressorts est légèrement inférieure au rayon du trampoline : on note $\ell_0 = \alpha R$ avec $\alpha \lesssim 1$.

Approche énergétique

1 - Reproduire la figure sur la copie. Représenter les deux forces exercées par les deux ressorts puis construire graphiquement leur résultante \vec{F} .

Plutôt que d'exprimer la force \vec{F} en fonction de z , il est calculatoirement beaucoup plus simple de raisonner en termes d'énergie potentielle. Je vous rappelle (généreusement !) que l'énergie potentielle élastique emmagasinée par un ressort de raideur k et d'allongement $\Delta\ell$ s'écrit

$$E_{pe} = \frac{1}{2}k \Delta\ell^2.$$

2 - Montrer que l'énergie potentielle élastique *totale* du point A s'écrit

$$E_{pe,tot} = k \left[(1 + \alpha^2)R^2 + z^2 - 2\alpha R^2 \sqrt{1 + \frac{z^2}{R^2}} \right].$$

3 - On suppose que l'amplitude des oscillations verticales du tapis est faible devant le rayon du trampoline : $|z| \ll R$. Montrer que dans cette hypothèse

$$E_{\text{pe,tot}} = E_0 + \frac{1}{2}Kz^2$$

en exprimant les constantes E_0 et K en fonction des paramètres du problème.

4 - Interpréter physiquement l'expression précédente.

5 - Justifier que le mouvement d'Anatole est conservatif. En déduire (en utilisant donc une approche énergétique) l'équation différentielle vérifiée par z et donner la forme générale de ses solutions, faisant intervenir des constantes reliées aux conditions initiales que l'on ne cherchera pas à calculer.

Approche par les forces

6 - Reproduire le schéma équivalent sur la copie. Représenter les deux forces exercées par les deux ressorts puis construire graphiquement leur résultante \vec{F} .

Exprimer \vec{F} à partir de considérations géométriques et de projection est relativement technique sur le plan calculatoire. On admet que les calculs mènent à une expression de la forme

$$\vec{F} = -Kz\vec{e}_z \quad \text{avec} \quad K = \text{cte.}$$

7 - Interpréter physiquement cette expression : à quel système simple les deux ressorts sont-ils équivalents ?

8 - Établir l'équation différentielle vérifiée par z et donner la forme générale de ses solutions, faisant intervenir des constantes reliées aux conditions initiales que l'on ne cherchera pas à calculer.

B - Anatole décolle ?

Le modèle précédent n'est pas complètement satisfaisant car il implique que le trampoline attire Anatole vers le bas dès que $z > 0$, ce qui est physiquement absurde. Il faut donc adopter une autre approche pour aller plus loin. Désormais, on ne modélise plus l'action du trampoline sur Anatole par des ressorts mais par une force de contact \vec{N} inconnue a priori. Néanmoins, compte tenu de la partie précédente, on fait néanmoins l'hypothèse que le tapis oscille de manière sinusoïdale : tant qu'Anatole est en contact avec le tapis, l'ordonnée z du point A est de la forme

$$z(t) = Z_0 - Z_1 \cos(\omega t).$$

Le signe « - » signifie simplement qu'à l'instant initial le trampoline est à la position la plus basse de sa trajectoire.

9 - Quelle est la direction et le sens de \vec{N} ? Varient-ils au cours du mouvement ?

10 - Par application du théorème de la résultante cinétique, établir l'expression de $N = \|\vec{N}\|$.

11 - À quelle condition sur N Anatole décolle-t-il du trampoline ? En déduire une condition impliquant Z_1 et ω pour que le décollage puisse avoir lieu. Le décollage est-il favorisé pour les oscillations de faible ou forte amplitude ? de basse ou haute fréquence ? Cela vous semble-t-il qualitativement cohérent ?

C - Le grand saut !

On suppose pour la suite cette condition remplie : Anatole décolle bel et bien du trampoline.

12 - Déterminer l'ordonnée z_d d'Anatole lorsque le décollage a lieu.

13 - Montrer qu'Anatole a alors une vitesse

$$v_d = \omega Z_1 \sqrt{1 - \frac{g^2}{Z_1^2 \omega^4}}.$$

14 - En négligeant tout frottement, en déduire la hauteur h atteinte par Anatole au sommet du saut. Indication : il y a beaucoup plus simple que le PFD pour répondre à cette question !