



BLAISE PASCAL
PT 2023-2024

DM 11 – à rendre lundi 15 janvier

Correction

Thermodynamique industrielle

Réfrigérateur domestique

Flasher (ou cliquer sur) ce code pour accéder au rapport officiel sur le site de la banque PT.



A - Modélisation d'une machine réfrigérante ditherme

1 Cours Un réfrigérateur a pour but de **refroidir le compartiment réfrigéré**. Ainsi, le fluide frigorigène doit prélever de l'énergie à la source froide ($Q_f > 0$) et la rendre à la source chaude ($Q_c > 0$), ce qui nécessite de lui fournir du travail ($W > 0$).

2 Cours L'efficacité d'un réfrigérateur est définie par

$$e_f = \frac{Q_f}{W}.$$

Raisonnons sur la totalité du fluide frigorigène contenu dans la machine, au cours d'un cycle complet. D'après le premier principe,

$$\Delta U \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{=} W + Q_f + Q_c \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cycle}}}{=} 0.$$

Par ailleurs, le second principe donne

$$\Delta S \underset{\substack{\uparrow \\ \text{2nd P}}}{=} \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} + S_c \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cycle}}}{=} 0 \quad \text{d'où} \quad \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} = -S_c \leq 0.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \frac{-W - Q_f}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} &\leq 0 \\ \left(\frac{1}{T_f} - \frac{1}{T_c}\right) Q_f &\leq \frac{W}{T_c} \\ \frac{T_c - T_f}{T_c T_f} Q_f &\leq \frac{W}{T_c} \\ \frac{Q_f}{W} &\leq \frac{T_f}{T_c - T_f} \end{aligned}$$

ce qui donne

$$e_f \leq \frac{T_f}{T_c - T_f} = e_f^{\max}.$$

B - Étude d'un cycle réfrigérant à compression de vapeur

3 **Cours** Voir figure 1. Dans le condenseur, il y a refroidissement, liquéfaction et sous-refroidissement, ce qui est un processus dans lequel le fluide cède de l'énergie : le condenseur doit donc être au contact de la source chaude. Réciproquement, il y a évaporation et surchauffe dans l'évaporateur, ce qui est processus au cours duquel le fluide doit recevoir de l'énergie : ainsi, l'évaporateur doit être au contact de la source froide.

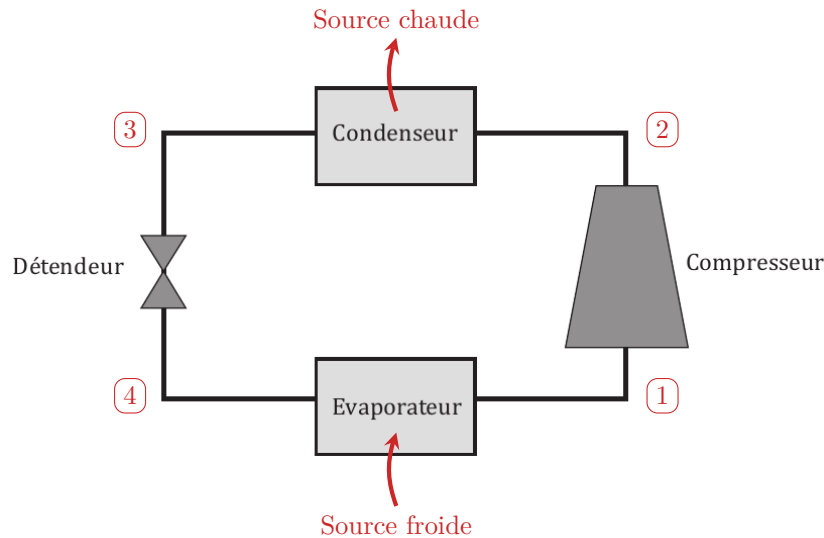


Figure 1 – Structure interne du réfrigérateur.

Cycle avec compression réversible

4 **Classique** Voir figures 3 et 4, page 9.

5 **Classique** Voir figure 2.

Point	1	2s	2	3	4	1'	2'
P (bar)	2,9	10	10	10	2,9	1,3	10
T (°C)	10	53	58	30	0	0	80
État du fluide	v.sèche	v.sèche	v.sèche	liq	diphasé	v.sèche	v.sèche
h (kJ · kg ⁻¹)	407	432	440	242	242	402	465

Figure 2 – Paramètres d'état du fluide aux différents points du cycle.

6 **Cours** L'évaporateur et le condenseur sont des échangeurs thermiques, dans lesquels les échanges énergétiques se font du plus chaud vers le plus froid. Ainsi, pour que le fluide reçoive de l'énergie dans l'évaporateur, au contact de la source froide, il faut que la température d'évaporation $T_{\text{évap}}$ soit inférieure à T_f ; et réciproquement, pour que le fluide cède de l'énergie dans le condenseur, au contact de la source chaude, il faut que la température de condensation soit supérieure à T_c .

7 **Difficile** Supposer les échangeurs isobares signifie que les pertes de charge y sont négligées, le fluide est donc considéré comme un **fluide parfait**.

8 **Cours** Un gaz parfait vérifie la loi de Joule, $dh = c_p dT$, ce qui implique que ses isothermes sont confondues avec ses isenthalpes. Ainsi, les isothermes d'un gaz parfait sont **verticales** dans le diagramme des frigoristes, alors que ses isenthalpes sont **horizontales** dans le diagramme entropique. On constate que **ce n'est pas le cas** pour le R134a, qui ne peut donc pas être assimilé à un gaz parfait.

Cycle avec compression non réversible

9 **Classique** D'après la définition du rendement isentropique,

$$h_2 - h_1 = \frac{h_{2s} - h_1}{\eta}.$$

Numériquement,

$$h_2 - h_1 = \frac{432 - 407}{0,75} = \frac{4}{3} \times 25 \quad \text{soit} \quad \boxed{h_2 - h_1 = 33 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}},$$

ce qui donne $h_2 = 440 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$. Le cycle est tracé en violet sur la figure 3, page 9.

10 **Classique** Voir figure 2, page 2.

11 **Classique** Voir figure 4, page 9.

12 Qualitativement, comme la compression est adiabatique alors le fluide n'échange pas d'entropie avec son environnement, si bien qu'il conserve toute l'entropie créée au cours de la compression. Pour une approche quantitative, appliquons le second principe industriel à la compression $1 \rightarrow 2$. Si elle est réversible, alors

$$s_{2s} - s_1 = \underbrace{s_{\text{éch},12s}}_{\text{adiab}} + \underbrace{s_{e,12s}}_{\text{réversible}} \quad \text{d'où} \quad s_{2s} = s_1.$$

Si elle est irréversible, alors

$$s_2 - s_1 = \underbrace{s_{\text{éch},12}}_{\text{adiab}} + s_{c,12} \quad \text{donc} \quad s_2 = s_1 + s_{c,12} = s_{2s} + s_{c,12} \quad \text{d'où} \quad \boxed{s_2 > s_{2s}}$$

car l'entropie créée est nécessairement positive.

13 **Cours** En utilisant les notations de l'énoncé, le premier principe industriel, appliqué à un fluide en écoulement au travers d'un composant thermodynamique s'écrit

$$\boxed{\Delta_{ij}h + \Delta_{ij}e_c + \Delta_{ij}e_{pp} = w_{ij} + q_{ij} \quad \text{ou} \quad D[\Delta_{ij}h + \Delta_{ij}e_c + \Delta_{ij}e_{pp}] = \mathcal{P}_{i,ij} + \mathcal{P}_{th,ij}}$$

L'énoncé impose très clairement ses notations, il est donc indispensable de les utiliser ! Par ailleurs, le premier principe industriel implique des grandeurs massiques, qu'il est donc nécessaire d'écrire en minuscule, y compris pour l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de pesanteur.

14 Un réfrigérateur domestique a une hauteur maximale $H \sim 2 \text{ m}$, ce qui correspond à un écart d'énergie potentielle de pesanteur massique de $\Delta e_{pp} = gH \sim 20 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} = 0,02 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$, ce qui est effectivement négligeable devant les variations d'enthalpie massique au cours des étapes du cycle qui sont de l'ordre au moins de quelques dizaines de $\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$, d'après le tableau figure 2, page 2.

Attention à bien raisonner sur l'énergie potentielle de pesanteur massique, comme l'indique le premier principe industriel, et comme l'énoncé le demande clairement.

15 Si la vitesse est uniforme sur une section droite, alors $D_V = V S$, d'où on déduit le débit massique $D = \rho D_V = D_V/v$ (la masse volumique est l'inverse du volume massique). Ainsi,

$$\boxed{D = \frac{VS}{v}}.$$

16 **Difficile** Le volume massique d'un gaz est supérieur à celui d'un liquide, le volume massique maximal est donc atteint au point 1 ou au point 2. Sachant qu'une compression diminue ce volume massique, on en déduit qu'il est maximal en entrée du compresseur, c'est-à-dire **au point 1**.

Pour s'en convaincre de manière plus quantitative, on peut chercher à raisonner comme si le gaz était parfait. Alors, d'après l'équation d'état écrite sous forme massique,

$$Pv = \frac{RT}{M} \quad \text{donc} \quad v = \frac{RT}{MP},$$

ce qui donnerait

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{T_2}{T_1} \times \frac{P_1}{P_2} = \frac{320}{283} \times \frac{3}{10} \simeq \frac{1}{3} < 1$$

La valeur est telle qu'on peut penser que l'écart entre le comportement du gaz et le modèle du gaz parfait ne vient pas modifier l'ordre entre v_1 et v_2 .

17 D'après les deux questions précédentes,

$$V^{\max} = \frac{D v^{\max}}{S} = \frac{1 \cdot 10^{-2} \times 7 \cdot 10^{-2}}{(1 \cdot 10^{-2})^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{V^{\max} = 7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}.$$

18 Si le fluide passait d'une vitesse nulle (cas extrême!) à la vitesse V^{\max} , on aurait

$$\Delta e_c = \frac{(V^{\max})^2}{2} = 25 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} = 0,025 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1},$$

ce qui est de nouveau négligeable devant les variations typiques d'enthalpie massique au cours des différentes étapes du cycle.

Là aussi, attention à bien tenir compte du fait que Δe_c est massique.

19 **Cours** Il n'y a d'échange avec la source froide que dans l'évaporateur, au cours de l'étape 4-1. Comme un échangeur ne compte pas de pièce mobile, le premier principe industriel donne

$$h_1 - h_4 = \cancel{w_{41}} + q_f.$$

De même, le fluide ne reçoit du travail que dans le compresseur, au cours de l'étape 1-2. Comme celui-ci est adiabatique, le premier principe industriel donne

$$h_2 - h_1 = w_{\text{compr}} + \cancel{q_{12}}.$$

On en déduit

$$\boxed{e_f \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{déf}}}{=} \frac{q_f}{w_{\text{compr}}} = \frac{h_1 - h_4}{h_2 - h_1}}.$$

20 **Classique** Numériquement, avec les données reportées dans le tableau figure 2 page 2,

$$e_f = \frac{407 - 242}{440 - 407} = \frac{165}{33} \quad \text{d'où} \quad \boxed{e_f \simeq 5}.$$

21 **Classique** Par définition,

$$\boxed{\mathcal{P}_{\text{th}}^f = Dq_f = 1,65 \text{ kW} \quad \text{et} \quad \mathcal{P} = Dw_{\text{compr}} = 0,33 \text{ kW}}.$$

22 **Cours** Un compresseur ne peut aspirer que de la **vapeur sèche**, sous peine d'être endommagé. La surchauffe permet de garantir qu'il n'y a plus du tout de liquide dans l'état 1, y compris en cas de petite perturbation du cycle.

La surchauffe permet également d'augmenter q_f , mais comme elle augmente également w_{compr} , le gain sur l'efficacité est minime en pratique.

23 **Cours** Le sous-refroidissement a pour effet de décaler le point 3, et donc le point 4, vers la gauche du diagramme des frigoristes, ce qui permet d'augmenter la longueur 4-1, ce qui signifie une augmentation de q_f tout en laissant w_{compr} inchangé. Le sous-refroidissement permet donc d'**augmenter l'efficacité**. Le sous-refroidissement n'est pas poursuivi jusqu'à 20 °C pour des questions de longueur de conduite : pour une température de sortie plus basse, il doit y avoir plus d'échange énergétique au sein du condenseur, et donc celui-ci doit être plus long.

C - Association réfrigérateur-congérateur

24 **Difficile** Voir figure 3, page 9. La position des points 4' et 4'' est donnée par l'égalité des puissances. Le premier principe industriel appliqué à l'évaporateur se situant dans le réfrigérateur donne

$$D(h_{4'} - h_4) = \mathcal{P}_{\text{th,frigo}} + \cancel{\mathcal{P}_{i,44'}}$$

car un évaporateur ne compte pas de pièce mobile. De même, pour le congélateur,

$$D(h_{1'} - h_{4''}) = \mathcal{P}_{\text{th,congel}} + \cancel{\mathcal{P}_{i,44''}}.$$

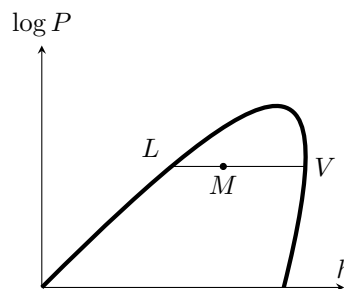
Comme on impose $\mathcal{P}_{\text{th,congel}} = \mathcal{P}_{\text{th,frigo}}$, et comme la détente 4'4'' est isenthalpique ($h_{4'} = h_{4''}$), on en déduit

$$h_{4'} - h_4 = h_{1'} - h_{4'} \quad \text{soit} \quad \boxed{h_{4'} = \frac{h_{1'} + h_4}{2} = \frac{402 + 242}{2} = 322 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} .}$$

25 Voir figure 3, page 9.

26 **Difficile** Avec les notations de la figure ci-dessous, le titre en vapeur x est donné par le rapport des longueurs mesurées le long d'une isobare

$$x = \frac{LM}{LV} .$$



Ainsi, en raisonnant le long d'une isobare, plus le point est proportionnellement proche de la courbe de rosée, plus le titre en vapeur y est élevé. On constate sur la figure 3 que le point 4'' est plus proche de la courbe de rosée que le point 4'. On en déduit que le mélange diphasé comporte davantage de vapeur au point 4'' qu'au point 4'.

27 Il faut cette fois considérer les deux échanges avec les deux sources froides. Par adaptation directe des questions précédentes,

$$e'_f = \frac{(h_{4'} - h_4) + (h_{1'} - h_{4''})}{h_{2'} - h_{1'}} = \frac{h_{1'} - h_4}{h_{2'} - h_{1'}} = \frac{402 - 242}{462 - 402} = \frac{160}{60}$$

soit finalement

$$\boxed{e'_f = 2,7 .}$$

D - Utilisation d'un réfrigérateur

Évaluation des fuites thermiques

28 **Classique** La cuisine étant plus chaude que le réfrigérateur, celui-ci reçoit réellement de l'énergie de la part de la cuisine, donc $\mathcal{P}_{\text{th}} > 0$, donc $\lambda > 0$ car $T_c > T$.

29 **Classique** Réalisons un bilan enthalpique pour l'intérieur du réfrigérateur pendant une durée dt . Comme il est débranché, il ne reçoit que la puissance \mathcal{P}_{th} .

$$\frac{dH}{dt} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{=} \mathcal{P}_{\text{th}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Joule}}}{=} C \frac{dT}{dt} \quad \text{soit} \quad C \frac{dT}{dt} = \lambda(T_c - T)$$

d'où on déduit l'équation différentielle

$$\boxed{\frac{dT}{dt} + \frac{\lambda}{C}T = \frac{\lambda}{C}T_c .}$$

30 **Classique** Les solutions de cette équation sont de la forme

$$T(t) = A e^{-t/\tau} + T_c \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{C}{\lambda}.$$

En utilisant la condition initiale,

$$T(t=0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{=} T_f \underset{\substack{\uparrow \\ \text{expr}}}{=} A + T_c \quad \text{soit} \quad A = T_f - T_c$$

et ainsi

$$T(t) = (T_f - T_c) e^{-t/\tau} + T_c.$$

31 **Classique** La température T_f est la condition initiale, donc

$$T_f = T(t=0) = 277 \text{ K}.$$

La température T_c est la solution particulière, atteinte au bout d'un temps « infini », donc

$$T_c = T(t \rightarrow \infty) = 293 \text{ K}.$$

32 La solution trouvée question 30 se réécrit

$$\frac{T - T_c}{T_f - T_c} = e^{-t/\tau} \quad \text{donc} \quad \ln \frac{T - T_c}{T_f - T_c} = -\frac{t}{\tau} = -\frac{\lambda}{C} t.$$

Ainsi, on lit graphiquement la pente α

$$\alpha = \frac{-4,8 - 0}{50 - 0} \simeq -0,1 \text{ h}^{-1}$$

d'où on déduit

$$\lambda = \alpha C = 3 \cdot 10^4 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{h}^{-1}.$$

Sachant que une heure compte 3600 s, on peut convertir ce résultat :

$$\lambda = \frac{3 \cdot 10^4}{3600} \simeq 8 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1}.$$

La courbe étant parfaitement linéaire (et pas très « authentique »), on peut se contenter d'exploiter un unique point.

Attention aux unités pour la conversion des $\text{J} \cdot \text{h}^{-1}$ en W .

Fonctionnement en régime stationnaire

33 L'efficacité est supposée correspondre à 25 % de l'efficacité de Carnot calculée à la question 2,

$$e_f = \frac{1}{4} \frac{T_f}{T_c - T_f} = \frac{277}{4 \times (293 - 277)} \quad \text{soit} \quad e_f \simeq 4,3.$$

34 La puissance des fuites vaut

$$\mathcal{P}_{\text{th}} = \lambda(T_c - T_f) = 1,3 \cdot 10^2 \text{ W}.$$

35 L'intérieur du frigo cède la puissance thermique \mathcal{P}_f au fluide frigorigène. Le bilan enthalpique du contenu du réfrigérateur s'écrit donc en régime permanent

$$\frac{dH}{dt} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{=} \mathcal{P}_{\text{th}} - \mathcal{P}_f \underset{\substack{\uparrow \\ \text{RP}}}{=} 0 \quad \text{donc} \quad \mathcal{P}_f = \mathcal{P}_{\text{th}}.$$

De plus, par définition de l'efficacité,

$$e_f = \frac{\mathcal{P}_f}{\mathcal{P}_c} \quad \text{soit} \quad \mathcal{P}_c = \frac{\mathcal{P}_{\text{th}}}{e_f} \simeq 30 \text{ W}.$$

Mise en route du réfrigérateur

36 La puissance fournie par le compresseur est constante, mais comme la température interne du réfrigérateur change, l'efficacité n'est pas constante. La puissance \mathcal{P}_f reçue par le fluide (donc prélevée à l'intérieur du réfrigérateur) vaut donc

$$\mathcal{P}_f = \frac{1}{4} \times \frac{T}{T_c - T} \times \mathcal{P}_c.$$

Le bilan enthalpique précédent devient donc

$$\frac{dH}{dt} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{=} \mathcal{P}_{th} - \mathcal{P}_f \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Joule}}}{=} C \frac{dT}{dt}$$

ce qui donne

$$\frac{dT}{dt} = \underbrace{\frac{\lambda}{C}}_{=B} (T_c - T) - \underbrace{\frac{\mathcal{P}_c}{4C}}_{=A} \frac{T}{T_c - T}.$$

37 En l'absence de fuite, cette équation devient

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{\mathcal{P}_c}{4C} \frac{T}{T_c - T}.$$

En séparant les variables,

$$\begin{aligned} \frac{T_c - T}{T} dT &= -\frac{\mathcal{P}_c}{4C} dt \\ \int_{T_c}^{T_f} \left(1 - \frac{T_c}{T}\right) dT &= +\frac{\mathcal{P}_c}{4C} \int_0^{t_f} dt \\ (T_f - T_c) - T_c \ln \frac{T_f}{T_c} &= \frac{\mathcal{P}_c}{4C} t_f \\ T_f - T_c + T_c \ln \frac{T_c}{T_f} &= \frac{\mathcal{P}_c}{4C} t_f \end{aligned}$$

d'où on déduit

$$t_f = \frac{4C T_f}{\mathcal{P}_c} \left(1 - \frac{T_c}{T_f} + \frac{T_c}{T_f} \ln \frac{T_c}{T_f}\right).$$

38 La température atteinte du bout de cinq heures vaut 280 K au lieu de 277 K : la température décroît **plus lentement** en présence de fuites thermiques, ce qui est normal.

E - Comparaison de fluides frigorigènes

Dans ce sujet comme dans d'autres, il est d'usage que les questions portant sur des documents assez longs soient généreusement rétribuées pour récompenser le temps passé.

39 Compte tenu de la position des isothermes et des isobares dans un diagramme enthalpique (voir par exemple l'éternelle figure 3), on comprend que choisir $T_{\text{évap}} > T_{\text{éb}}(1 \text{ bar})$ revient à choisir $P_{\text{évap}} > 1 \text{ bar}$. Comme la pression d'évaporation est la pression minimale atteinte au cours du cycle, alors ce choix garantit bien qu'en tout point de l'installation la pression est supérieure à la pression atmosphérique. Concrètement, cela signifie qu'il peut donc y avoir des fuites de fluide frigorigène, mais pas d'entrée d'air dans le système.

40 La « production frigorifique » évoquée dans le document 1 est reliée à l'énergie prélevée lors de l'évaporation. D'après le premier principe appliqué à l'évaporateur, question 19,

$$q_f = h_1 - h_4.$$

Par ailleurs, le volume de fluide *aspiré* par le compresseur est relié au volume massique en entrée, soit au point 1. Ainsi, la production frigorifique volumique est définie par

$$P_{\dot{f}} = \frac{h_1 - h_4}{v_1}.$$

41 Plusieurs arguments peuvent être donnés : meilleures performances thermodynamiques que l'ammoniac (COP plus élevé) ; sécurité en installation domestique simple à assurer (pas de température ni pression extrême, au contraire de l'ammoniac) ; meilleure utilisation du compresseur (taux de compression plus faible).

En pratique, c'est l'argument de sécurité qui l'emporte pour les installations domestiques. En revanche, la production de froid industriel se fait largement avec de l'ammoniac, où les contraintes de sécurité deviennent différentes (une chambre froide industrielle ne risque pas, par exemple, d'être heurtée accidentellement, contrairement à un frigo domestique), et où la bonne production frigorifique volumique peut devenir avantageuse car elle permet d'utiliser moins de fluide, et donc d'avoir une installation moins encombrante.

42 Le R13a n'est pas inflammable ce qui est un avantage en terme de sécurité et peut justifier son usage aux États-Unis. En revanche, il a un GWP énorme, ce qui explique son interdiction en Europe à l'heure où le changement climatique devient le défi majeur de l'humanité.

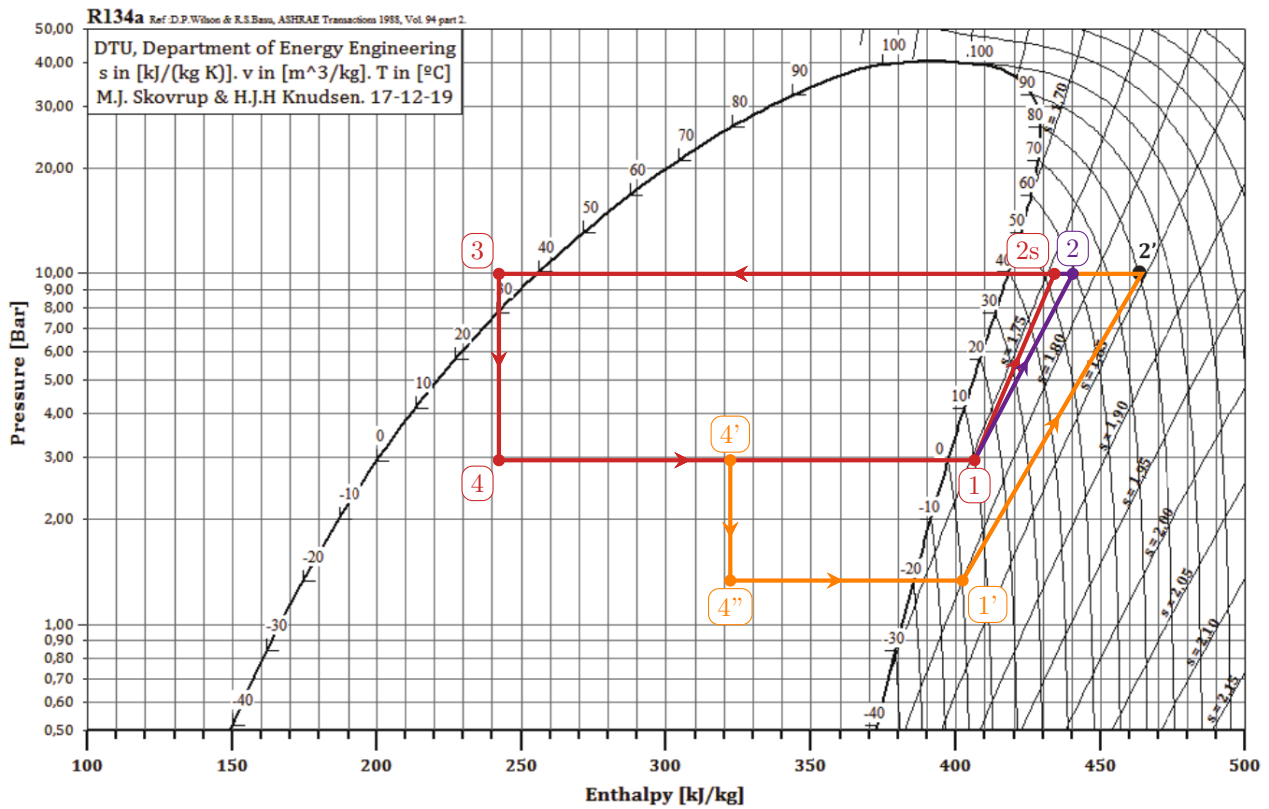


Figure 3 – Diagramme des frigoristes du R134a. Rouge : cycle avec compression réversible (Q4). Violet : cycle avec compression irréversible (Q9). Orange : cycle avec congélateur (Q25).

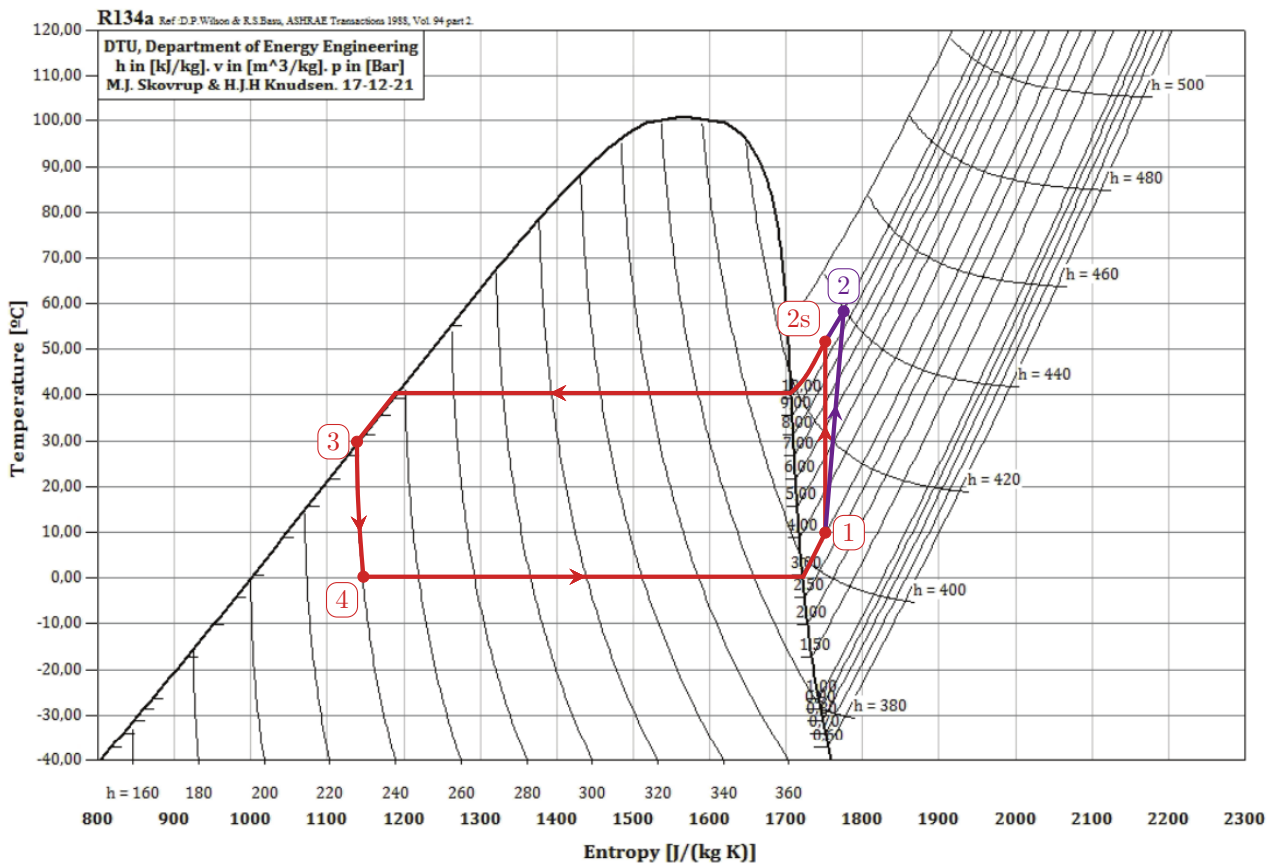


Figure 4 – Diagramme entropique du R134a. Rouge : cycle avec compression réversible (Q4). Violet : cycle avec compression irréversible (Q9).