Lois de Newton

Tombe la pluie

inspiré banque PT 2024

A - Chute dans une atmosphère sèche

1 Notons V le volume de la goutte :

$$\frac{\Pi_\mathrm{A}}{P} = \frac{\rho_\mathrm{a} V g}{\rho_\mathrm{e} V g} = \frac{\rho_\mathrm{a}}{\rho_\mathrm{e}} \ll 1\,.$$

La poussée d'Archimède est négligeable devant le poids.

> *Attention, ce sont les* normes *que l'on compare, et pas les vecteurs eux-mêmes, ce qui n'aurait aucun sens.*

2 Étudions le mouvement de la goutte dans le référentiel terrestre, supposé galiléen. La goutte est soumise à

- son poids : $\vec{P} = m\vec{g} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_\mathrm{e} g \vec{e}_z$;
- la force de frottement : $\vec{f} = -6\pi\eta\, R\, v\, \vec{e}_z$.

D'après le PFD en projection,

$$\boxed{m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - 6\pi\,\eta\, Rv\,.}$$

3 En se ramenant à une forme canonique,

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \underbrace{\frac{6\pi\,\eta\, R}{m}}_{=1/\tau} v = g\,,$$

on identifie

$$\tau = \frac{m}{6\pi\,\eta\, R} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3\,\rho_\mathrm{e}}{6\pi\,\eta\, R} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\tau = \frac{2\rho_\mathrm{e} R^2}{9\eta} = 0{,}44\,\mathrm{s}\,.}$$

Vérifions l'homogénéité de cette relation :

$$\begin{cases} [2/9] = 1 \\ [\rho_\mathrm{e}] = \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3} \\ [R] = \mathrm{m} \\ [\eta] = \dfrac{[f]}{[R]\,[v]} = \dfrac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}}{\mathrm{m}\times\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}} = \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-1} \end{cases} \qquad \text{donc} \qquad [\tau] = \frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}\times\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-1}} = \mathrm{s}$$

4 L'équation différentielle s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}v = g\,.$$

Forme générale des solutions : $v_\mathrm{p} = \tau g$ est une solution particulière, d'où

$$v(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \tau g\,.$$

Détermination de la constante :

$$v(t=0) \underset{\text{CI}}{\overset{\uparrow}{=}} 0 \underset{\text{expr}}{\overset{\uparrow}{=}} A + \tau g \qquad \text{donc} \qquad A = -\tau g\,.$$

Conclusion :

$$\boxed{v(t) = \tau g \left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)\,.}$$

On en déduit $z(t)$ par séparation des variables,

$$\int_{z(0)=0}^{z(t)} \mathrm{d}z = \tau g \int_0^t \left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right) \mathrm{d}t \qquad \text{soit} \qquad z(t) - z(0) = \tau g \left[t + \tau\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\right]_0^t$$

et ainsi

$$\boxed{z(t) = \tau g \left(t + \tau(\mathrm{e}^{-t/\tau} - 1)\right)\,.}$$

5 Dans la limite $t \gg \tau$, on obtient

$$\boxed{v_{\text{lim}} = \tau g = 4{,}36\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.}$$

La durée du régime transitoire étant de l'ordre $5\tau = 2\,\mathrm{s}$, on peut considérer que la chute se fait intégralement à vitesse constante v_{lim} : pendant le transitoire, la distance parcourue sera inférieure à $v_{\text{lim}} \times 5\tau \simeq 10\,\mathrm{m}$ sur les 1000 m que compte la chute. Le temps de chute vaut donc

$$\boxed{\Delta t = \frac{H}{v_{\text{lim}}} = 230\,\mathrm{s} = 3\,\mathrm{min}\ 50\,\mathrm{s}.}$$

> *Attention à la précision de l'argument permettant de négliger le transitoire : écrire que τ est « très petit » ne veut rien dire dans l'absolu, il faut le comparer à la durée totale de la chute d'une manière ou d'une autre pour que cela ait un sens.*
>
> *On peut aussi simplifier l'expression de z, en considérant que le sol ($z = H$) est atteint à un instant $\Delta t \gg \tau$. En reconnaissant $v_{lim} = \tau g$,*
>
> $$H \simeq \underbrace{\tau g}_{=v_{lim}} \left(\Delta t + \underbrace{\tau(0-1)}_{\ll t}\right) \simeq v_{lim}\,\Delta t\,.$$
>
> *Attention dans ce cas à rester cohérent dans les approximations : on ne peut pas en même temps négliger $\mathrm{e}^{-t/\tau}$ mais conserver $t - \tau$ dans le résultat.*

B - Chute dans une atmosphère humide

6 Le volume de la goutte s'écrit

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad \text{donc} \qquad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{4}{3}\pi \times 3r^2 \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 4\pi r^2 \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

On reconnaît ainsi la surface de la goutte,

$$4\pi r^2 \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 4\pi r^2\, k \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = k\,.$$

En utilisant la condition initiale $r(0) = r_0$, on en déduit

$$\boxed{r(t) = r_0 + kt\,.}$$

7 La dérivée de la quantité de mouvement s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{v}\,.$$

En reliant la masse au volume,

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \rho_\mathrm{e}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \rho_\mathrm{e} \times k \times 4\pi r(t)^2 \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = 4\pi\, k\, \rho_\mathrm{e}(r_0 + kt)^2\,.$$

D'après le théorème de la résultante cinétique généralisé à la goutte de masse variable, on a en projection

$$\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}v &= mg - 6\pi\eta(r_0 + kt)v \\
\frac{4}{3}\pi\,\rho_\mathrm{e}\,(r_0 + kt)^3\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \Big(4\pi\,k\,\rho_\mathrm{e}(r_0+kt)^2 - 6\pi\eta(r_0+kt)\Big)\,v &= \frac{4}{3}\pi\,\rho_\mathrm{e}\,(r_0+kt)^3 g \\
\frac{2}{3}\rho_\mathrm{e}(r_0+kt)^2\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \Big(2k\rho_\mathrm{e}(r_0+kt) + 3\eta\Big)\,v &= \frac{2}{3}\rho_\mathrm{e}(r_0+kt)^2 g \\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{3k}{r_0+kt} + \frac{9\eta}{2\rho_\mathrm{e}(r_0+kt)^2}\right)v &= g
\end{aligned}$$

ce qui s'identifie avec la forme donnée par l'énoncé en posant

$$\boxed{A = 3k \qquad \text{et} \qquad B = \frac{9\eta}{2\rho_\mathrm{e}}\,.}$$

8 Cherchons la solution particulière sous la forme

$$v_\mathrm{P}(t) = at + b\,.$$

D'après l'équation différentielle,

$$\begin{aligned}
a + \frac{3k}{r_0+kt}(at+b) &= g \\
a(r_0+kt) + 3k(at+b) &= g(r_0+kt) \\
(ak + 3ka - kg)t &= gr_0 - ar_0 - 3kb
\end{aligned}$$

Le membre de gauche dépendant du temps mais pas celui de droite, les deux sont forcément nuls, donc

$$\begin{cases} ak + 3ka - kg = 0 \\ gr_0 - ar_0 - 3kb = 0 \end{cases} \qquad \text{donc} \qquad \begin{cases} a = \dfrac{g}{4} \\ \left(1 - \dfrac{1}{4}\right)gr_0 - 3kb = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} a = \dfrac{g}{4} \\ b = \dfrac{r_0 g}{4k} \end{cases}$$

d'où on conclut sur la solution particulière,

$$\boxed{v_\mathrm{P}(t) = \frac{gt}{4} + \frac{r_0 g}{4k}\,.}$$

> *On peut évidemment procéder aussi par identification des coefficients des deux fonctions affines du membre de gauche et de celui de droite.*

9 L'équation homogène s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{A}{r_0+kt}v = 0\,.$$

En séparant les variables,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}v}{v} &= -\frac{A}{r_0+kt}\,\mathrm{d}t \\
\int_{v_\mathrm{H}(0)=K}^{v_\mathrm{H}(t)} \frac{\mathrm{d}v}{v} &= -\frac{A}{k}\int_0^t \frac{k\,\mathrm{d}t}{r_0+kt} \\
\ln\frac{v_\mathrm{H}(t)}{K} &= -3\ln\frac{r_0+kt}{r_0} \\
\ln\frac{v_\mathrm{H}(t)}{K} &= \ln\left(\frac{r_0+kt}{r_0}\right)^{-3}
\end{aligned}$$

En passant à l'exponentielle,

$$v_{\mathrm{H}}(t) = K \left(\frac{r_0 + kt}{r_0} \right)^{-3} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{v_{\mathrm{H}}(t) = K \frac{{r_0}^3}{(r_0 + kt)^3}\,.}$$

10 Compte tenu de ce qui précède, la forme générale des solutions s'écrit

$$v(t) = K \frac{{r_0}^3}{(r_0 + kt)^3} + \frac{gt}{4} + \frac{r_0 g}{4k}\,.$$

À l'instant initial,

$$v(t) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{=} 0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{expr}}}{=} K \frac{{r_0}^3}{{r_0}^3} + 0 + \frac{r_0 g}{4k} \qquad \text{donc} \qquad K = -\frac{r_0 g}{4k}\,.$$

Ainsi,

$$\boxed{v(t) = \frac{r_0 g}{4k} \left(1 - \frac{{r_0}^3}{(r_0 + kt)^3} \right) + \frac{gt}{4}\,.}$$