Lois de Newton

Travailler avec vos cours et TD ouverts est ***chaudement recommandé*** *: un DM est un entraînement, pas une évaluation. Réfléchir ensemble est une bonne idée, mais le travail de rédaction doit être individuel. En cas de besoin,* ***n'hésitez pas à me poser des questions****, idéalement à la fin d'un cours ou éventuellement par mail.*

Ceinture		Travail à réaliser
	Ceinture blanche	Questions 1 à 5
	Ceinture jaune	Questions 1 à 7
	Ceinture rouge	En entier
	Ceinture noire	En entier

Flasher ou cliquer pour accéder au corrigé

Tombe la pluie

Un nuage est constitué d'une grande quantité de gouttelettes d'eau en suspension dans l'air. Il se forme par condensation de la vapeur d'eau naturellement présente dans l'atmosphère lorsque les conditions météorologiques sont adéquates. Ces gouttelettes en suspension grossissent en se réunissant sous l'effet des courants atmosphériques jusqu'à atteindre une taille critique, au-delà de laquelle elles tombent sous forme de pluie. Dans cette partie, nous allons étudier la chute d'une gouttelette d'eau à l'aide de deux modélisations, décrivant le cas d'une atmosphère sèche, puis celui d'une atmosphère humide, où le rayon de la goutte varie au cours de la chute. L'effet du vent est négligé, ce qui permet de supposer la chute verticale.

Données :

- intensité de la pesanteur $g = 9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$;
- viscosité de l'air $\eta = 2\cdot 10^{-5}\,\mathrm{Pa\cdot s}$;
- masse volumique de l'air $\rho_\mathrm{a} \simeq 1\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$;
- masse volumique de l'eau $\rho_\mathrm{e} = 1\cdot 10^{3}\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$.

A - Chute dans une atmosphère sèche

On étudie la chute d'une gouttelette d'eau sphérique de masse volumique ρ_e et de rayon constant $R = 0{,}2\,\mathrm{mm}$ dans une atmsophère sèche, constituée d'air de masse volumique ρ_a. À l'instant $t = 0$, la gouttelette quitte le nuage d'où elle provient sans vitesse initiale. L'air exerce sur la goutte une force de frottement modélisée sous la forme

$$\vec{f} = -6\pi\eta R\vec{v}(t)\,,$$

où η est la viscosité de l'air et $\vec{v}(t)$ la vitesse instantanée de la goutte. On définit l'axe (Oz) vertical descendant.

1 - Exprimer le rapport entre la poussée d'Archimède subie par la goutte et son poids. En déduire que l'une des deux forces est négligeable.

2 - Établir l'équation différentielle vérifiée par la composante $v(t)$ de la vitesse de la gouttelette projetée sur l'axe (Oz) vertical descendant.

3 - Identifier un temps caractéristique τ en fonction de R, ρ_e et η_a uniquement. Vérifier explicitement l'homogénéité de la relation définissant τ, et le calculer numériquement.

4 - Établir l'expression de $v(t)$ en fonction de g, τ et t uniquement. En déduire celle de $z(t)$ en prenant l'origine au niveau du nuage.

5 - Exprimer et calculer numériquement la vitesse limite vers laquelle tend la gouttelette au cours de sa chute. En faisant une approximation que l'on justifiera, en déduire littéralement et numériquement le temps de chute de la goutte en fonction de l'altitude $H = 1000\,\mathrm{m}$ à laquelle se trouve le nuage.

B - Chute dans une atmosphère humide

La vitesse limite dépendant du rayon de la goutte, une goutte qui chute dans une atmosphère humide peut rejoindre des gouttelettes plus petites et les absorber, faisant croître son rayon au cours de sa chute. Le nombre de gouttelettes absorbées, et donc le taux de croissance du volume, est proportionnel à la surface de la goutte :

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = kS\,.$$

À l'instant $t = 0$, la gouttelette quitte le nuage d'où elle provient, sans vitesse initiale et avec un rayon initial r_0.

6 - Montrer que la loi d'évolution du rayon s'écrit $r(t) = r_0 + kt$.

La masse de la goutte dépendant du temps, des précautions doivent être prises pour écrire la relation fondamentale de la dynamique. On admet qu'il faut ici l'écrire en termes de quantité de mouvement $\overrightarrow{p}(t) = m(t)\overrightarrow{v}(t)$, et tenir compte de la dépendance en temps des deux grandeurs en développant la dérivée.

7 - Montrer que l'équation différentielle vérifiée par la vitesse $v(t)$ de la gouttelette peut alors s'écrire

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \left[\frac{A}{r_0 + kt} + \frac{B}{(r_0+kt)^2}\right] v = g$$

avec A et B des constantes à exprimer en fonction de ρ_e, η et k.

Rapidement après le début de sa chute, le rayon de la gouttelette devient suffisamment important pour que le terme $B/(r_0+kt)^2$ soit négligeable devant le terme $A/(r_0+kt)$.

8 - Déterminer une solution particulière de l'équation simplifiée, en la cherchant sous la forme d'une fonction affine $v_\mathrm{P}(t) = at + b$.

9 - Déterminer la forme générale $v_\mathrm{H}(t)$ des solutions de l'équation homogène associée. Raisonner pour cela par séparation des variables en posant $v_\mathrm{H}(0) = K = \text{cte}$.

10 - En utilisant la condition initiale, déterminer la constante K et conclure sur l'expression de $v(t)$.