

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

PHYSIQUE - CHIMIE

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
 - Ne pas utiliser de correcteur.
 - Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.
-

DM 7 - à rendre le 19/11

Les calculatrices sont autorisées.

I - Très abordable, très proche du DM5

II - Le coeur de ce DM !

III - Programme de 2e année

IV - Vous pouvez tenter, mais c'est un formalisme que nous n'avons jamais travaillé ... donc partie très difficile

V - Q19 pas encore vue, autres questions intéressantes

Ceinture blanche : partie II uniquement

Ceinture jaune : parties I et II

Ceinture rouge : parties I, II et V

Ceinture noire : parties I, II et V + III facultatif

Le soleil a rendez-vous avec la pluie

Ce sujet traite des gouttes d'eau et de l'arc-en-ciel qui résulte de l'interaction des rayons solaires avec la pluie.

Il est constitué de 8 parties qui peuvent être résolues de manière totalement indépendante les unes des autres.

Dans les **parties I** et **II** (mécanique du point) et **III** (électrostatique), on s'intéresse d'abord à la vitesse limite de chute des gouttes de pluie et à la mesure de leurs diamètres, puis, dans la **partie IV**, à la répartition (distribution) de ces diamètres dans une averse et, dans la **partie V** (étude d'un signal), à une autre mesure de ces diamètres.

Ensuite, dans les **parties VI** (optique géométrique) et **VII** (interférences), on étudie les phénomènes optiques engendrés par les gouttes d'eau éclairées par le Soleil.

Enfin, la dernière **partie VIII** (chimie) s'intéresse à la valorisation des eaux de pluie.

Dans tout le sujet, on suppose les gouttes d'eau sphériques. L'ordre de grandeur de leur diamètre, noté D , est le millimètre.

Partie I - Vitesse des gouttes de pluie

On s'intéresse à la chute dans l'air d'une goutte d'eau de diamètre D et de masse volumique $\rho = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. On prendra pour l'air une masse volumique égale à $\rho_a = 1,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Le référentiel terrestre est supposé galiléen. L'axe Oz est vertical descendant. L'accélération de la pesanteur vaut $\vec{g} = g\vec{e}_z$ avec $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Q1. Définir " référentiel galiléen ". Définir et exprimer le poids d'une goutte d'eau.

Q2. On admet que la seule autre force mise en jeu est la force de frottement, due à l'air, proportionnelle au carré de la vitesse v de la goutte. Elle s'écrit :

$$\vec{F}_{\text{frott}} = -C\pi\rho_a D^2 v^2 \vec{e}_z \text{ avec } C = 6,0 \cdot 10^{-2}.$$

Vérifier l'homogénéité de cette formule.

Q3. En appliquant la seconde loi de Newton à la goutte dans le référentiel terrestre, montrer que sa vitesse limite, donc indépendante du temps, s'écrit :

$$\vec{v}_{\text{lim}} = K\sqrt{D}\vec{e}_z$$

où K est un coefficient à exprimer en fonction de ρ , ρ_a , C et de g .

Calculer la vitesse limite pour des diamètres égaux à 1 mm, 3 mm et 5 mm.

Gunn et Kinzer ont mesuré en 1949 avec précision des vitesses limites de gouttes de différents diamètres. Les résultats de leurs mesures avec les barres d'incertitudes sont reportés sur la **figure 1** en trait plein ainsi que la représentation de la relation obtenue en **Q3** en traits pointillés.

Q4. Pour quelle(s) raison(s) le modèle théorique élaboré aux questions de **Q1** à **Q3** n'est-il pas validé pour toutes les tailles de gouttes ?

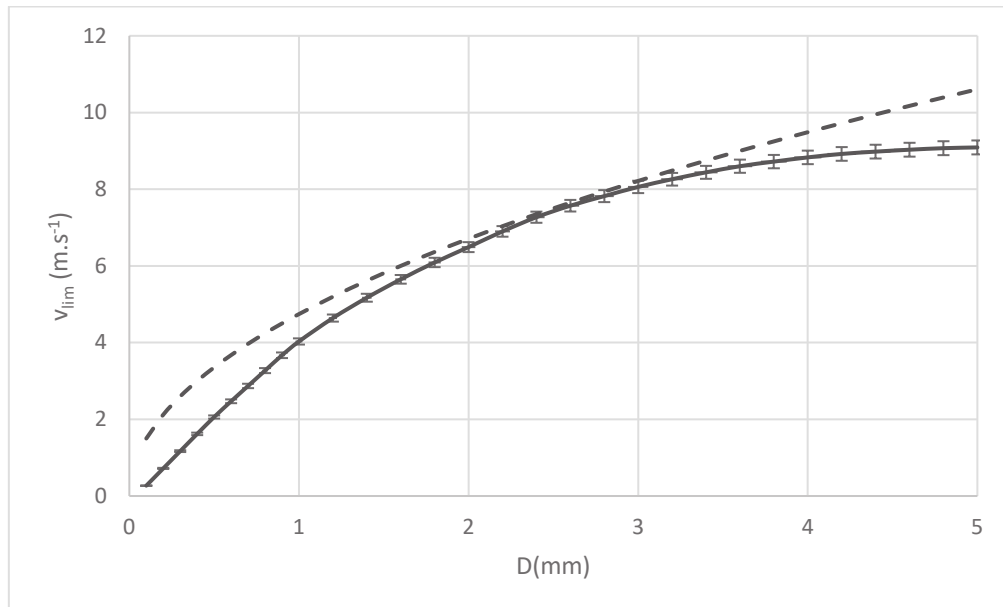


Figure 1 - Influence du diamètre sur la vitesse limite

Selon les précipitations, la taille des gouttes de pluie est très variable. La distribution des tailles de goutte, qui renseigne sur les événements météorologiques, doit souvent être mesurée. On utilise pour cela un disdromètre ("Distribution of Drops Meter").

Partie II - Disdromètre à impact avec platine

On suppose dans cette partie que la vitesse limite atteinte par une goutte de diamètre D qui tombe dans l'atmosphère est donnée par la relation :

$$\overline{v_{\text{lim}}} = K \sqrt{D} \mathbf{e}_z \text{ avec } K = 150 \text{ m}^{1/2} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Il existe deux types de disdromètres : le plus ancien est le disdromètre à impact (**photo 1**).

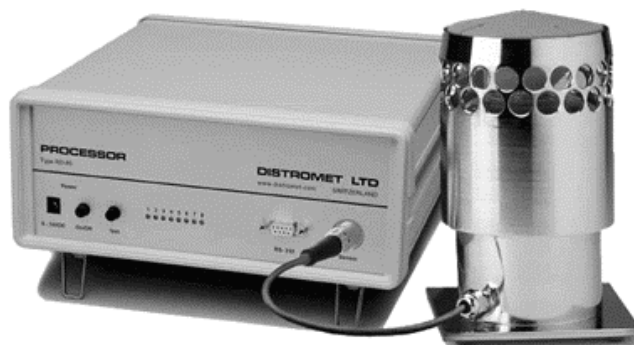


Photo 1 - Disdromètre Joss-Waltvogel

Il se compose d'une platine sensible recevant les gouttes de pluie de masse $m(D)$ ayant atteint leur vitesse limite et d'un système de traitement permettant la mesure de celle-ci.

On modélise la platine par un disque plan horizontal, de rayon R et de masse M , relié à un support fixe par l'intermédiaire d'une suspension, modélisée par un système masse-ressort amorti.

On note k la raideur du ressort liant la platine au support, l_0 sa longueur à vide et λ le coefficient de frottement traduisant l'amortissement du disque : la force de frottement, qui s'oppose à la vitesse de la platine, s'écrit donc $\vec{f} = -\lambda \vec{v}_{\text{platine}}$.

La goutte exerce, lors de son impact sur la platine, une force $\vec{F}(t) = F(t)\vec{e}_z$ verticale sur celle-ci.

Le référentiel lié au support est supposé galiléen.

Le déplacement de la platine du disdromètre par rapport à sa position d'équilibre est $Z(t)$ (**figure 2**).

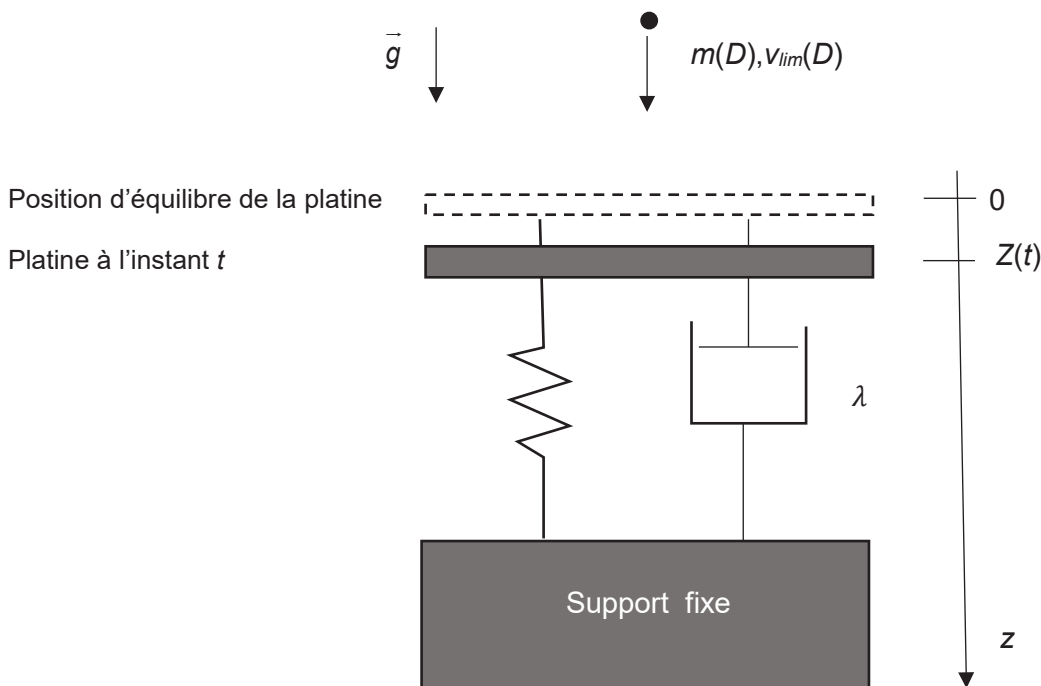


Figure 2 - Modélisation du disdromètre à impact à platine

Q5. Exprimer la longueur l_{equ} du ressort à l'équilibre de la platine, sans impact de goutte.

Q6. Montrer que l'équation liant $Z(t)$ à $F(t)$ est :

$$\frac{d^2Z(t)}{dt^2} + \gamma \frac{dZ(t)}{dt} + \beta Z(t) = \frac{F(t)}{M}$$

et exprimer les coefficients γ et β en fonction de k , M et de λ .

La force $F(t)$ est modélisée par :

- $F = F_0 = m(D) \frac{v_{\text{lim}}(D)}{\tau(D)}$ pour $0 < t < \tau$;
- $F = 0$ pour $t > \tau$.

Q7. Donner la signification physique de τ et justifier que son ordre de grandeur est :

$$\tau(D) \approx \frac{D}{v_{\text{lim}}(D)}.$$

On utilise en pratique un facteur correctif $\xi = 0,65$ tel que :

$$\tau(D) = \xi \frac{D}{v_{\text{lim}}(D)}.$$

Calculer τ pour $D = 2,5 \text{ mm}$.

Q8. On se place à $0 \leq t \leq \tau(D)$ et on souhaite que la réponse du disdromètre soit la plus rapide possible.

a) Quelle doit être la relation entre les coefficients β et γ ?

On se place dans ce cas.

b) Le système étant à l'équilibre avant la chute de la goutte, montrer que la réponse du disdromètre s'écrit alors pour $0 \leq t \leq \tau$:

$$Z(t) = \frac{F_0}{k} \left[1 - \left(1 + \gamma \frac{t}{2} \right) e^{-\gamma t/2} \right].$$

c) Comment choisir γ pour réaliser $Z(\tau) = \frac{F_0}{k}$? Montrer alors que $Z(\tau)$ est proportionnel à D^α et donner la valeur de α .

d) Tracer l'allure de $Z(t)$ pour $0 \leq t \leq 2\tau$.

e) Comment la mesure de $Z(t)$ permet-elle de connaître D ?

~~Partie III - Disdromètre à impact avec piézoélectrique~~

Ce disdromètre est un disdromètre à impact utilisant un capteur piézoélectrique (**photo 2**).

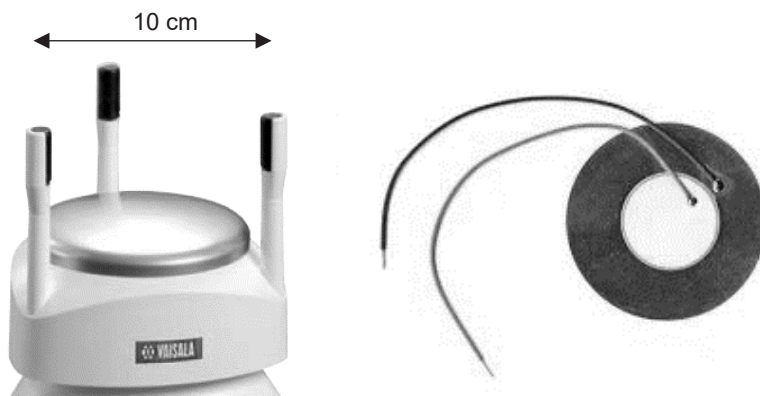


Photo 2 - (à gauche) Disdromètre Vaisala / (à droite) Capteur piézoélectrique

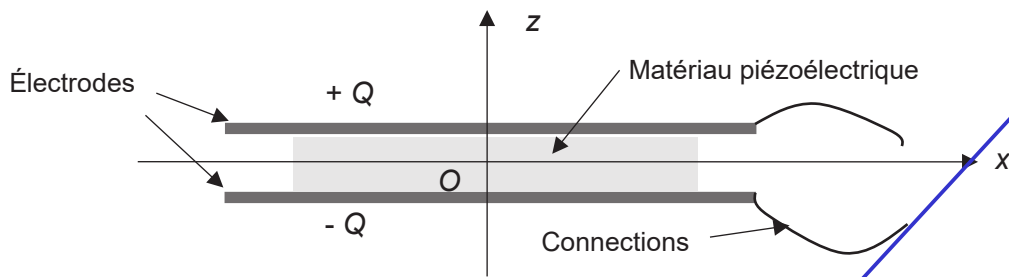


Figure 3 - Modélisation du capteur piézoélectrique

Les cristaux piézoélectriques, par exemple le quartz, génèrent une tension lorsqu'ils sont soumis à une contrainte mécanique et ils se déforment lorsqu'ils sont soumis à une tension électrique.

On modélise le capteur piézoélectrique par l'ensemble de deux électrodes planes de surface S chargées $+Q$ et $-Q$ et séparées par le matériau piézoélectrique, d'épaisseur e (**figure 3**).

On considère tout d'abord l'électrode chargée $+Q$: on la modélise par un plan infini d'épaisseur nulle, situé en $z = e/2$ et on cherche le champ électrostatique $\vec{E}$ créé par cette distribution placée dans le vide.

- Q9.** En étudiant les symétries, puis les invariances de la distribution, donner la direction du champ électrique $\vec{E}(M)$ en un point M quelconque de l'espace et les coordonnées dont ce champ dépend.
- Q10.** En utilisant un théorème d'électromagnétisme à énoncer, calculer le champ électrique créé par cette distribution en tout point de l'espace.
- Q11.** En déduire l'expression du champ électrique $\vec{E}(M)_{\text{vide}}$ créé par l'association des deux électrodes chargées $+Q$ et $-Q$, en un point M entre les deux électrodes s'il y avait le vide. Dans un matériau ayant une permittivité ε , on remplace la permittivité diélectrique du vide par ε . En déduire le champ $\vec{E}(M)_{\text{piezo}}$ à l'intérieur du matériau piézoélectrique.
- Q12.** On admet que la charge Q est proportionnelle à la force $F(t)$ exercée par une goutte sur le capteur lors de son impact. Montrer, en utilisant la modélisation de $F(t)$ proposée en haut de la **page 5**, que la tension $u(t)$ aux bornes du capteur piézoélectrique est proportionnelle à D^3 .

Partie IV - Dimensionnement et étalonnage du disdromètre à impact

On considère tout d'abord une averse dont toutes les gouttes ont le même diamètre D , tombent à la vitesse $v_{\text{lim}}(D)$ et sont réparties en volume de manière homogène avec une densité volumique N .

(densité volumique = nbre de gouttes par m^3)

On suppose dans cette partie que la vitesse limite atteinte par une goutte de diamètre D qui tombe dans l'atmosphère est donnée par la relation : $\vec{v}_{\text{lim}} = K\sqrt{D}\vec{e}_z$ avec $K = 150 \text{ m}^{1/2} \cdot \text{s}^{-1}$ et que la durée de l'impact est :

$$\tau(D) = \xi \frac{D}{v_{\text{lim}}(D)} \text{ avec } \xi = 0,65.$$

Q13. Exprimer le nombre de gouttes G tombant sur la surface S du disdromètre pendant la durée τ d'un impact, en fonction de N , S , D et de ξ . En déduire l'expression de la surface maximale S_{max} du capteur du disdromètre permettant d'éviter des chevauchements du signal dus à deux impacts successifs.

Dans une averse, on trouve en fait plusieurs tailles de gouttes. La distribution des tailles de gouttes est caractérisée par la valeur $n(D)$, telle que le nombre de gouttes de pluie par unité de volume, de diamètre compris entre D et $D + dD$, s'écrit : $dN = n(D)dD$.

La notation d indique une grandeur infinitésimale, exactement comme dt

Une distribution empirique très utilisée est celle de Marshall et Palmer :

$$n(D) = n_0 \exp\left(-\frac{D}{D_0}\right)$$

avec $n_0 = 8,0 \cdot 10^3 \text{ m}^{-3} \cdot \text{mm}^{-1}$ (unité usuelle).

Q14. On considère une averse contenant toutes les tailles de gouttes, répondant à la distribution de Marshall et Palmer. Montrer que D_0 représente le diamètre moyen des gouttes.

On donne :

$$\int_0^{\infty} x e^{-x} dx = 1.$$

Q15. Exprimer pour la distribution de Marshall et Palmer le nombre de gouttes G tombant sur la surface S du disdromètre pendant une durée τ .

En déduire une seconde expression de S_{max} . En pratique, le constructeur applique une marge.

On prend librement la valeur $\xi = 6,5$. Calculer S_{max} numériquement pour $D_0 = 1,5 \text{ mm}$ et commenter au regard de la **photo 2**.

On peut étalonner le disdromètre à l'aide d'un pluviomètre : c'est un simple récipient cylindrique gradué recueillant l'eau de pluie (**photo 3**). Il ne permet pas de mesurer $n(D)$, mais seulement l'intensité R de l'averse.

Cette intensité R est définie comme la hauteur d'eau tombant au sol par unité de temps. Elle est donnée en pratique en $\text{mm} \cdot \text{h}^{-1}$. Il suffit donc de graduer le pluviomètre pour lire la hauteur d'eau après une durée définie et calculer l'intensité R .



Photo 3 - Pluviomètre

Q16. On considère tout d'abord une averse dont toutes les gouttes ont le même diamètre D_0 , tombant à la vitesse $v_{\text{lim}}(D_0)$ et réparties en volume de manière homogène avec une densité volumique N .

Exprimer l'intensité R de cette averse en fonction de N , D_0 et de $v_{\text{lim}}(D_0)$.

Q17. Justifier que R s'exprime de manière générale par :

$$R = \int_0^{\infty} n(D) v_{\text{lim}}(D) \pi \frac{D^3}{6} dD$$

et calculer R . On donne $\int_0^{\infty} x^{3,5} e^{-x} dx = \frac{105\sqrt{\pi}}{16} \approx 11,6$.

Faire l'application numérique en $\text{mm} \cdot \text{h}^{-1}$ pour $D_0 = 1,5 \text{ mm}$.

En général, le disdromètre sépare les gouttes en "classes" : à chaque classe correspond un diamètre D moyen et une "largeur" δD en diamètre. Cela signifie qu'appartiennent à la même classe toutes les gouttes dont le diamètre est compris dans l'intervalle $\left[D - \frac{\delta D}{2}, D + \frac{\delta D}{2} \right]$.

On donne (**figure 4**) l'histogramme obtenu après une mesure sur une durée de 24 heures avec un disdromètre de surface $S = 80 \text{ cm}^2$.

Cet histogramme donne le nombre de gouttes mesuré pour chaque classe, de largeur en diamètre variable :

- $\delta D = 0,1 \text{ mm}$ pour $0 \text{ mm} < D \leq 1 \text{ mm}$,
- $\delta D = 0,2 \text{ mm}$ pour $1 \text{ mm} < D \leq 2 \text{ mm}$,
- $\delta D = 0,4 \text{ mm}$ pour $D > 2 \text{ mm}$.

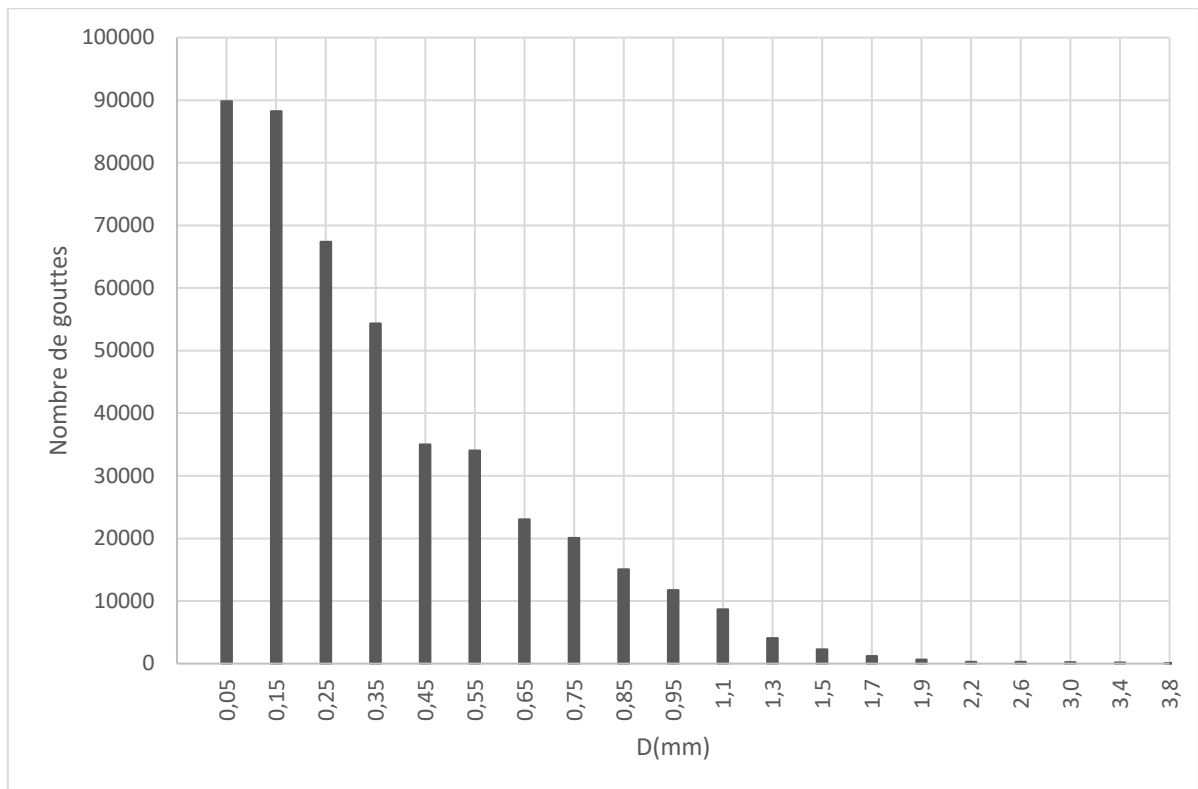


Figure 4 - Résultats d'une mesure sur une durée de 24 heures

Q18. Expliquer comment il est possible de calculer R à l'aide de ces données (le calcul n'est pas demandé).

Partie V - Disdromètre optique

Le second type de disdromètre, plus récent, est le disdromètre optique (**photo 4**).

Il est constitué :

- d'une source émettant un faisceau lumineux de section rectangulaire traversé par les gouttes de pluie. Le faisceau a une épaisseur $h = 1,0$ cm, une largeur $l = 4,0$ cm et une longueur $L = 25,0$ cm (**figure 5**) ;
- d'un capteur, sur lequel est focalisé le faisceau lumineux qui délivre une tension $e(t)$ proportionnelle à l'intensité lumineuse reçue.

Sans passage de goutte : $e(t) = kI_0$ où I_0 est l'intensité du faisceau et k une constante. Lors du passage d'une goutte : $e(t) = k(I_0 - I(t))$ où $I(t)$ est l'intensité occultée par la goutte.



Photo 4 - Disdromètre Parsivel

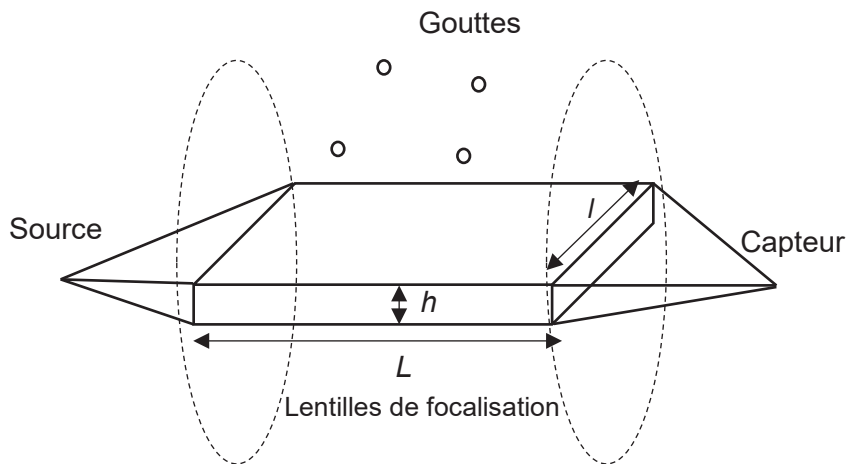
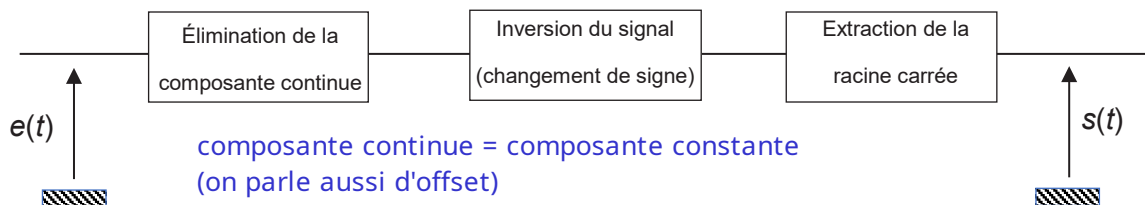


Figure 5 - Modèle de disdromètre optique

Le signal $e(t)$ est traité de la manière représentée sur le schéma ci-dessous :



~~Q19. Proposer un montage simple permettant d'éliminer la composante continue. Quel composant électronique permettrait de réaliser le bloc d'inversion du signal ?~~ Nous le verrons dans la suite de l'année

Après traitement de $e(t)$, on obtient le signal $s(t)$, dû au passage d'une goutte dans le faisceau présenté **figure 6**. On suppose que le diamètre de la goutte est inférieur à h .

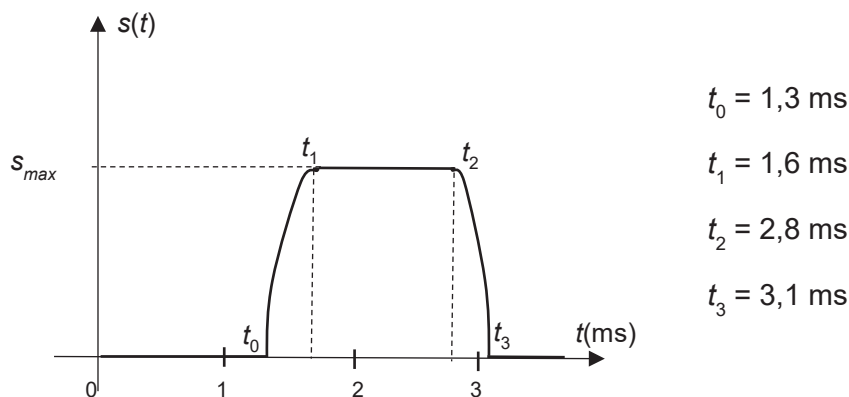


Figure 6 - Signal $s(t)$ généré par le passage d'une goutte dans le faisceau lumineux

Q20. Calculer la vitesse de chute de la goutte en expliquant la démarche.

Q21. Montrer que le maximum $s_{\max}$ du signal $s(t)$ est proportionnel au diamètre D de la goutte détectée :

$$s_{\max} = K'D.$$

Q22. Quel avantage présente le disdromètre optique par rapport au disdromètre à impact ?