

Énergie et précipitation

I - Lancer d'un palet sur une piste en demi-cercle

- **Système** : palet ;
- **Référentiel galiléen** : terrestre
- **Bilan des forces dans la portion rectiligne** : voir figure 1.
 - ▷ poids \vec{P} qui dérive de l'énergie potentielle de pesanteur $E_{pp} = mgz$;
 - ▷ réaction normale \vec{N} , qui ne travaille pas.

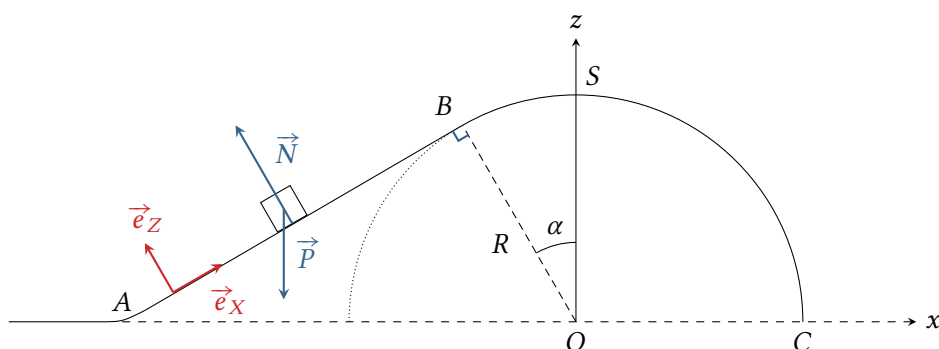


Figure 1 – Schéma des forces s'exerçant sur le palet en phase de montée.

- 1 D'après le théorème de l'énergie mécanique appliqué entre A et B,

$$E_m(B) - E_m(A) = W_{AB}(\vec{N}) = 0$$

Or $z_B - z_A = R \cos \alpha$, d'où

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 + mgR \cos \alpha = 0$$

d'où finalement

$$v_B = \sqrt{v_A^2 - 2gR \cos \alpha}.$$

- 2 Pour que v_B soit défini, il faut évidemment que le terme dans la racine soit positif, et donc que

$$v_A^2 > 2gR \cos \alpha \quad \text{soit} \quad v_A > \sqrt{2gR \cos \alpha}.$$

- 3 Pour obtenir une équation différentielle sur la norme de la vitesse, le plus simple est d'appliquer le théorème de l'énergie mécanique en puissance. L'énergie mécanique s'écrit

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + mgz = \frac{1}{2}mv^2 + mgX \sin \alpha$$

Le mouvement étant unidimensionnel, $v = \dot{X}$ et par conservation de l'énergie mécanique,

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 \quad \text{soit} \quad m\cancel{v} \frac{dv}{dt} + mg\cancel{v} \sin \alpha = 0 \quad \text{d'où} \quad \frac{dv}{dt} = -g \sin \alpha.$$

Le PFD en projection sur \vec{e}_X marche tout aussi bien.

4 En séparant les variables de l'équation différentielle précédente,

$$dv = -g \sin \alpha dt$$

et on peut alors intégrer entre A et B,

$$\int_{AB} dv = -g \sin \alpha \int_{AB} dt \quad \text{donc} \quad v_B - v_A = -g \sin \alpha \Delta t_{AB}$$

et ainsi

$$\Delta t_{AB} = \frac{v_A - v_B}{g \sin \alpha}.$$

5 Utilisons désormais le repère polaire de centre O. Le palet n'est soumis qu'à \vec{N} , perpendiculaire à la vitesse et qui ne travaille pas, et à son poids, qui dérive de l'énergie potentielle de pesanteur

$$E_{pp} = mgz = mgR \cos \theta.$$

Son énergie mécanique est ainsi constante, donc

$$E_m(A) = E_m(\theta) \quad \text{soit} \quad \frac{1}{2} m v_A^2 + 0 = \frac{1}{2} m v(\theta)^2 + mgR \cos \theta$$

et ainsi

$$\frac{1}{2} m v_A^2 = \frac{1}{2} m v(\theta)^2 + mgR \cos \theta$$

d'où

$$v(\theta) = \sqrt{v_A^2 - 2gR \cos \theta}.$$

6 • **Cinématique** : le mouvement est circulaire de rayon R, donc

$$\vec{OM} = R \vec{e}_r \quad \rightsquigarrow \quad \vec{v} = R \dot{\theta} \vec{e}_\theta \quad \rightsquigarrow \quad \vec{a} = -R \dot{\theta}^2 \vec{e}_r + R \ddot{\theta} \vec{e}_\theta$$

• **Bilan des forces** : tant que le palet est en contact avec la piste, il subit

- ▷ son poids $\vec{P} = mg(-\cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)$;
- ▷ la réaction de la piste $\vec{N} = N \vec{e}_r$, radiale car les frottements sont négligés.

• **PFD** :

$$m \vec{a} = \vec{P} + \vec{N} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 = -mg \cos \theta + N \\ mR\ddot{\theta} = mg \sin \theta \end{cases}$$

On déduit de la projection sur \vec{e}_r la norme de \vec{N} , d'où

$$\vec{N} = m(-R\dot{\theta}^2 + g \cos \theta) \vec{e}_r.$$

La vitesse du palet lorsqu'il se trouve sur la portion circulaire est égale à $v = R\dot{\theta}$, on peut donc réécrire

$$\vec{N} = m \left(-\frac{v^2}{R} + g \cos \theta \right) \vec{e}_r$$

et d'après la question précédente

$$v^2 = v_A^2 - 2gR \cos \theta$$

si bien que

$$\vec{N} = m \left(-\frac{v_A^2}{R} + 3g \cos \theta \right) \vec{e}_r$$

7 Le palet reste en contact du support si et seulement si N reste positive pour tout θ . On s'intéresse dans cette question au domaine $[-\alpha, 0]$. Par croissance de la fonction cosinus, N est minimale en $\theta = -\alpha$, c'est donc au point B que le palet est le plus susceptible de décoller. De plus, c'est le premier point atteint par le palet : s'il y a décollage avant le sommet, **il aura forcément lieu au point B** . Ainsi, le palet décolle de la piste avant d'atteindre le sommet S si

$$N(\theta = -\alpha) \leq 0 \quad \text{soit} \quad -\frac{v_A^2}{R} + 3g \cos \alpha \leq 0 \quad \text{donc} \quad \boxed{v_A > \sqrt{3gR \cos \alpha}}.$$

La méthode usuelle pour déterminer s'il y a décollage consiste à déterminer l'angle pour lequel $N(\theta)$ s'annule. C'est la marche à suivre dans la question suivante, mais elle est inopérante ici, ce que l'on peut comprendre de la façon suivante. Dans le cas usuel, le système arrive « par le haut » et la fonction $N(\theta)$ est positive à la position initiale, puis décroissante, le point de décollage éventuel est donc le point d'annulation ... mais ici la fonction $N(\theta)$ est croissante, et peut déjà être négative au point B où le palet atteint la portion circulaire. En effet, la norme N est discontinue au point B : tant que le palet est sur la partie plane, $N = mg \cos \alpha > 0$... mais l'expression change sur la partie circulaire. Ainsi, N peut devenir brutalement négative en B sans pour autant s'annuler. Or si $N(-\alpha) < 0$ le décollage est immédiat, et le point d'annulation ne sera jamais atteint.

8 Supposons le sommet atteint, et considérons désormais l'éventualité d'un décollage pour $\theta \in [0, \pi/2]$. Comme la fonction $N(\theta)$ est décroissante sur cet intervalle, et que $N(\pi/2) < 0$ quelle que soit v_A , le palet ne peut pas rester au contact du support circulaire pendant toute la descente. Il y a décollage en θ_d tel que $N(\theta_d) = 0$, c'est-à-dire

$$-\frac{v_A^2}{R} + 3g \cos \theta_d = 0 \quad \text{soit} \quad \cos \theta_d = \frac{v_A^2}{3gR}$$

et finalement

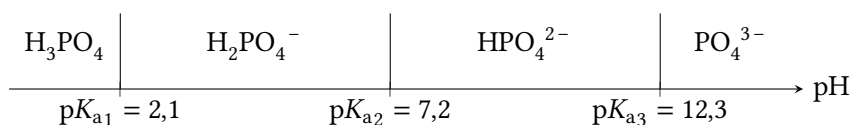
$$\boxed{\theta_d = \arccos \frac{v_A^2}{3gR}}.$$

Sachant que le palet atteint le sommet seulement s'il ne décolle pas avant, donc seulement si $v_A < \sqrt{3gR \cos \alpha}$, le problème mathématique de définition de l'angle θ_d pour v_A trop élevé ne se pose pas physiquement.

On peut par la même occasion constater que $\theta_d > \alpha$, ce qui est logique puisque la fonction $N(\theta)$ est paire : si θ_d avait été inférieur à α , le palet serait passé par la position $-\theta_d$ où N se serait déjà annulée et où il aurait donc décollé ... ce qui l'aurait empêché d'atteindre le sommet.

II - Prévenir l'eutrophisation

9 Les frontières du diagramme de prédominance correspondent aux pK_a successifs :



Le phosphore est donc majoritairement présent sous forme HPO_4^{2-} . Cet ion ne comptant qu'un atome de phosphore,

$$\boxed{[\text{HPO}_4^{2-}] \simeq C_P = 5,0 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}}.$$

10 Le pK_a du couple $\text{NH}_4^+/\text{NH}_3$ est justement égal au pH de l'effluent. Par conséquent, d'après la relation de Henderson, les deux espèces sont présentes à la même concentration, et l'azote est équiréparti sous les deux formes, soit

$$[\text{NH}_3] + [\text{NH}_4^+] = C_N \quad \text{donc} \quad \boxed{[\text{NH}_3] = [\text{NH}_4^+] = \frac{C_N}{2} = 8,0 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}}.$$

- 11** Un volume de 1 m^3 d'effluent contient 5 mol de phosphore. D'après l'équation de précipitation, faire réagir $n = 4 \text{ mol}$ de composé phosphoré demande aussi $n = 4 \text{ mol}$ de magnésium, soit une masse de chlorure de magnésium

$$m = n M = 380 \text{ g}.$$

- 12** Raisonnons après précipitation de 80% du phosphore. Le solide étant présent, d'après la loi d'action des masses appliquée à la réaction de dissolution du solide,

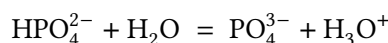
$$[\text{Mg}^{2+}] [\text{PO}_4^{3-}] [\text{NH}_4^+] = K_s \quad \text{donc} \quad [\text{Mg}^{2+}] = \frac{K_s}{[\text{PO}_4^{3-}] [\text{NH}_4^+]}$$

Reste à relier les différentes concentrations aux données.

- La réaction a fait précipiter 4 mol d'azote, il ne reste donc plus que 12 mol d'azote équiréparti sous forme d'ammoniac et d'ammonium, soit

$$[\text{NH}_4^+] = [\text{NH}_3] = \frac{C_{\text{N},F}}{2} = 6,0 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}.$$

- L'ion PO_4^{3-} étant minoritaire, sa concentration se calcule à partir de la LAM appliquée à la réaction entre HPO_4^{2-} et l'eau et formant PO_4^{3-} ,



ce qui donne

$$\frac{[\text{PO}_4^{3-}] [\text{H}^+]}{[\text{HPO}_4^{2-}]} = K_{a3} \quad \text{donc} \quad [\text{PO}_4^{3-}] = \frac{K_{a3}}{[\text{H}^+]} [\text{HPO}_4^{2-}] \simeq 10^{-pK_{a3} + \text{pH}} C_{\text{P},F} = 1,0 \cdot 10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}.$$

Ainsi,

$$[\text{Mg}^{2+}] = 1,7 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Cette quantité correspond à une masse supplémentaire à ajouter à 1 m^3 d'effluent de 160 g , ce qui s'avère **non-négligeable** devant les 380 g impliqués dans la formation du précipité.

Du point de vue environnemental, les ions Mg^{2+} ne posent aucun problème. Les ions chlorure peuvent être plus gênants, car ils augmentent la salinité du milieu, mais la concentration finale reste ici relativement modérée, et l'eau adaptée à de nombreux usages.

- 13** On peut procéder ou bien par **décantation**, c'est-à-dire laisser la solution reposer jusqu'à ce que le solide tombe au fond par gravité, ou bien par **filtration**. Dans la pratique, les deux procédés sont souvent combinés.