Régime sinusoïdal forcé

Modèle de l'électron élastiquement lié

1 Comme $\omega T = 2\pi$,

$$\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1+\cos(2\omega t+\varphi)}{2}\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{T}\left[\frac{t}{2}+\frac{\sin(2\omega t+\varphi)}{2\omega}\right]_0^T$$
$$= \frac{1}{2}+\frac{\sin(4\pi+\varphi)-\sin(\varphi)}{4\pi}$$

et ainsi

$$\boxed{\left\langle\cos^2(\omega t+\varphi)\right\rangle = \frac{1}{2}\,.}$$

Puis,

$$\left\langle\sin^2(\omega t+\varphi)\right\rangle = \left\langle 1-\cos^2(\omega t+\varphi)\right\rangle = 1-\left\langle\cos^2(\omega t+\varphi)\right\rangle \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\left\langle\sin^2(\omega t+\varphi)\right\rangle = \frac{1}{2}\,.}$$

A - Un premier modèle

2 La taille typique d'un atome est de l'ordre de $a_0 \sim 10^{-10}$ m, les longueurs d'onde visibles sont comprises entre 400 et 800 nm soit $4\cdot 10^{-7}$ à $8\cdot 10^{-7}$ m. L'atome étant **très petit par rapport à la longueur d'onde**, le champ de l'onde électromagnétique peut être considéré uniforme.

3 À partir de l'expression de la force de Lorentz, on constate que

$$[\vec{E}] = [\vec{v}\wedge\vec{B}] \qquad \text{donc} \qquad [B] = \frac{[E]}{[v]}\,.$$

L'expression est donc bien homogène.

4 La force de Lorentz s'écrit

$$\vec{F}_{\text{OEM}} = -eE_0\cos(\omega t)\left(\vec{e}_x+\frac{\vec{v}}{c}\wedge\vec{e}_y\right)\,.$$

La composante magnétique est négligeable si $||\vec{v}|| \ll c$, c'est-à-dire si le mouvement de l'électron peut être décrit sans recours à la relativité.

5 L'électron est soumis à la force de Lorentz due à l'onde électromagnétique, à la force de Lorentz due au noyau et à la force de rayonnement. D'après le PFD,

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -e\vec{E}_{\text{OEM}} - e\vec{E}_{\text{N}} + \vec{f}_{\text{ray}}\,,$$

et comme le mouvement est supposé unidimensionnel le long de l'axe (Ox),

$$m\ddot{x} = -eE_0\cos(\omega t) - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\, a_0^3}x - \gamma m\dot{x}$$

soit finalement

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \underbrace{\gamma}_{=\omega_0/Q} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \underbrace{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\, m\, a_0^3}}_{={\omega_0}^2} x = -\frac{e}{m} E_0 \cos(\omega t)\,.}$$

Ainsi,

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\, m\, a_0^3}} = 1{,}6 \cdot 10^{16}\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}} \qquad \text{et} \qquad Q = \frac{\omega_0}{\gamma} = 1{,}6 \cdot 10^{8}\,.}$$

$\boxed{6}$ Le champ de l'OEM $E_0 \cos(\omega t)$ a pour amplitude complexe E_0. L'équation devient donc

$$-\omega^2 \underline{X} + \mathrm{j}\omega\gamma \underline{X} + {\omega_0}^2 \underline{X} = -\frac{e}{m} E_0 \qquad \text{d'où} \qquad \underline{X} = \frac{-\dfrac{e}{m} E_0}{{\omega_0}^2 - \omega^2 + \dfrac{\mathrm{j}\omega\omega_0}{Q}}\,,$$

ce qui s'écrit bien

$$\boxed{\underline{X} = \frac{\underline{X}_0}{1 - \dfrac{\omega^2}{{\omega_0}^2} + \dfrac{\mathrm{j}\omega}{Q\omega_0}} \qquad \text{avec} \qquad \underline{X}_0 = -\frac{e}{m{\omega_0}^2} E_0\,.}$$

B - Le ciel est bleu !

$\boxed{7}$ Les longueurs d'onde du domaine visible sont comprises entre 400 (violet) et 800 nm (rouge). Leur pulsation vaut donc

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi c}{\lambda} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\omega \in [\underbrace{2{,}4 \cdot 10^{15}}_{\text{rouge}} ; \underbrace{4{,}7 \cdot 10^{15}}_{\text{violet}}]\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}\,.}$$

$\boxed{8}$ On a $\omega_{\text{violet}}/\omega_0 \simeq 1/3$: même on se permet quelques approximations en physique, supposer $\omega \ll \omega_0$ est ici franchement osé ☺... mais ce n'est pas si grave car ce n'est pas directement le rapport ω/ω_0 qui intervient dans la fonction de transfert ! En prenant toujours le cas le plus défavorable du violet,

$$\frac{\omega^2}{{\omega_0}^2} \sim \frac{1}{10} \qquad \text{et} \qquad \frac{\omega}{Q\omega_0} \sim 2 \cdot 10^{-9}\,,$$

termes qu'il est plus raisonnable de négliger devant 1 tant que l'on se limite à des interprétations qualitatives comme c'est le cas ici. On a lors

$$\boxed{\underline{X} \simeq \underline{X}_0 = -\frac{e}{m{\omega_0}^2} E_0\,.}$$

La représentation complexe s'écrit donc

$$\underline{x}(t) = \underline{X}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = -\frac{e}{m{\omega_0}^2} E_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,.$$

En prendre la partie réelle conduit à

$$\boxed{x(t) = -\frac{e}{m{\omega_0}^2} E_0 \cos(\omega t)\,.}$$

$\boxed{9}$ En dérivant deux fois,

$$\ddot{x}(t) = \frac{e}{m{\omega_0}^2} E_0 \omega^2 \cos(\omega t)\,.$$

Ainsi,

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\left(\frac{e}{m{\omega_0}^2}E_0\omega^2\right)^2 \times \langle \cos^2(\omega t)\rangle$$

et en réutilisant le résultat montré en introduction,

$$\boxed{\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{e^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3\, m^2}\frac{\omega^4}{{\omega_0}^4}{E_0}^2\,.}$$

10 Les longueurs d'onde bleu-violet sont quasiment deux fois inférieures à la longueur d'onde rouge. La puissance diffusée est donc nettement supérieure pour le bleu plutôt que pour le rouge. Ainsi, lorsque le rayonnement solaire pénètre dans l'atmosphère, le bleu est davantage diffusé et semble venir de toutes les directions après diffusion multiple par un grand nombre de molécules, ce que schématise la figure 1.

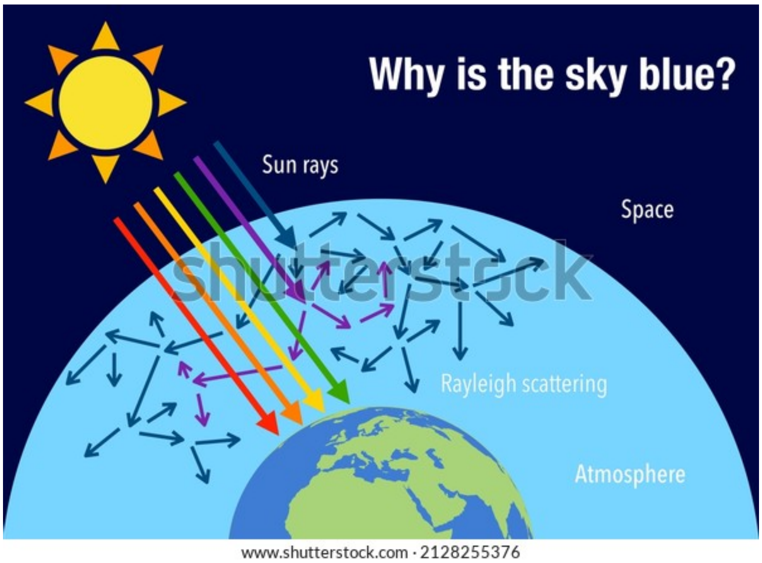

Figure 1 – Pourquoi le ciel est-il bleu ?.

> *L'explication doit faire apparaître les deux éléments pour être complète : d'une part le fait que la puissance diffusée dépend de la longueur d'onde, et d'autre part l'existence de diffusion multiple, ce qui permet de voir le ciel bleu même en regardant dos au soleil.*
>
> *N'évoquer que l'influence de la longueur d'onde reviendrait à n'interpréter que la couleur rouge du soleil couchant : les rayons étant rasants, ils traversent une grande épaisseur d'atmosphère et le spectre est très appauvri en longueur d'onde bleues. Il ne reste pratiquement que du rouge, qui est moins diffusé.*

C - Effet du rayonnement

11 Toute l'énergie électromagnétique rayonnée est forcément prélevée à l'électron, or c'est la force $\vec{f}_{\text{ray}}$ qui décrit cet effet. Il s'agit d'une force résistive, dont la puissance est négative, alors que la puissance rayonnée est positive.

12 Par définition,

$$\mathcal{P}_{\text{ray}} = \vec{f}_{\text{ray}} \cdot \vec{v} = K\frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{v}\,.$$

Dans l'hypothèse d'un mouvement sinuosïdal,

$$\vec{v} = -\omega X_{\text{m}}\sin(\omega t+\varphi)\,\vec{e}_x \qquad \vec{a} = -\omega^2 X_{\text{m}}\cos(\omega t+\varphi)\,\vec{e}_x \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t} = +\omega^3 X_{\text{m}}\sin(\omega t+\varphi)\,\vec{e}_x$$

ce qui conduit à

$$\mathcal{P}_{\text{ray}} = -K\omega^4 X_{\text{m}}^2\sin^2(\omega t+\varphi)\,.$$

Ainsi,

$$\left\langle \mathcal{P}_{\text{ray}} \right\rangle = -K\omega^4 X_{\text{m}}^{\ 2} \left\langle \sin^2(\omega t + \varphi) \right\rangle = -\frac{1}{2} K\omega^4 X_{\text{m}}^{\ 2} \,.$$

Par ailleurs, d'après la formule de Larmor,

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0\, c^3} \omega^4 X_{\text{m}}^{\ 2} \left\langle \cos^2(\omega t + \varphi) \right\rangle = \frac{e^2}{12\pi\varepsilon_0\, c^3} \omega^4 X_{\text{m}}^{\ 2} \,.$$

Ces deux expressions sont opposées si

$$\boxed{K = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0\, c^3} \,.}$$

13 Avec la nouvelle expression de la force de rayonnement, la même démarche qu'à la question 5 conduit à

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -eE_0 \cos(\omega t) - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\, a_0^{\ 3}} x + K\frac{\mathrm{d}^3 x}{\mathrm{d}t^3}$$

ou encore

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^{\ 2} x = -\frac{e}{m} E_0 \cos(\omega t) + \frac{K}{m}\frac{\mathrm{d}^3 x}{\mathrm{d}t^3} \,.$$

En passant en complexe comme précédemment

$$-\omega^2 \underline{X} + \omega_0^{\ 2} \underline{X} = -\frac{e}{m} E_0 - \mathrm{j}\frac{K}{m}\omega^3 \underline{X} \qquad \text{soit} \qquad \underline{X} = \frac{-\dfrac{e}{m}E_0}{\omega_0^{\ 2} - \omega^2 + \mathrm{j}\dfrac{K}{m}\omega^3}$$

ou encore

$$\boxed{\underline{X} = \frac{\underline{X}_0}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^{\ 2}} + \mathrm{j}\dfrac{K}{m\omega_0^{\ 2}}\omega^3} \,.}$$

14 D'une part, en reprenant le résultat établi en introduction,

$$\left\langle s(t)^2 \right\rangle = S_{\text{m}}^{\ 2} \left\langle \cos^2(\omega t + \varphi) \right\rangle = \frac{S_{\text{m}}^{\ 2}}{2} \,.$$

D'autre part, $\underline{S} = S_{\text{m}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$ par définition, donc

$$\frac{|\underline{S}|^2}{2} = \frac{S_{\text{m}}^{\ 2}}{2} \,.$$

Les deux expressions sont bien égales.

15 L'accélération de l'électron a pour amplitude complexe $\underline{\ddot{X}} = -\omega^2 \underline{X}$. En combinant la formule de Larmor et le résultat précédent,

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \frac{\left|-\omega^2 \underline{X}\right|^2}{2} = \frac{e^2}{12\pi\varepsilon_0 c^3} \frac{\omega^4\, |\underline{X}_0|^2}{\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^{\ 2}}\right)^2 + \left(\dfrac{K\omega^3}{m\omega_0^{\ 2}}\right)^2}$$

On constate sur cette expression que $\langle \mathcal{P} \rangle$ est une quantité continue, toujours positive, qui s'annule pour $\omega = 0$ et $\omega/\omega_0 \longrightarrow +\infty$. Par conséquent, d'après le théorème de Rolle, elle passe nécessairement par un maximum : il existe bien une résonance en puissance diffusée pour une certaine pulsation de l'onde excitatrice.

> *Attention, la pulsation de résonance ne correspond pas ici au minimum du dénominateur de $\langle \mathcal{P} \rangle$, puisque la pulsation intervient aussi au numérateur. C'est cette difficulté qui rend le calcul de la pulsation de résonance particulièrement fastidieux.*