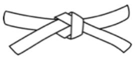
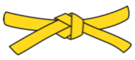
Régime sinusoïdal forcé

Travailler avec vos cours et TD ouverts est ***chaudement recommandé*** *: un DM est un entraînement, pas une évaluation. Réfléchir ensemble est une bonne idée, mais le travail de rédaction doit être individuel. En cas de besoin,* ***n'hésitez pas à me poser des questions****, idéalement à la fin d'un cours ou éventuellement par mail.*

Ceinture		Travail à réaliser
	Ceinture blanche	Questions 1 à 8
	Ceinture jaune	Questions 1 à 10
	Ceinture rouge	En entier
	Ceinture noire	En entier

Flasher ou cliquer pour accéder au corrigé

Modèle de l'électron élastiquement lié

Une onde électromagnétique interagit avec les atomes et molécules du milieu qu'elle traverse : sous l'effet du champ extérieur, leurs électrons se mettent à osciller, et émettent à leur tour un rayonnement. Ce faisant, l'amplitude de l'onde excitatrice diminue progressivement. L'onde rayonnée étant émise dans des directions différentes de celle de l'onde excitatrice, on parle de *diffusion*. Le modèle de l'électron élastiquement lié est un modèle relativement simple du phénomène, reposant uniquement sur de la mécanique classique, permettant de rendre compte d'un certain nombre d'observations expérimentales.

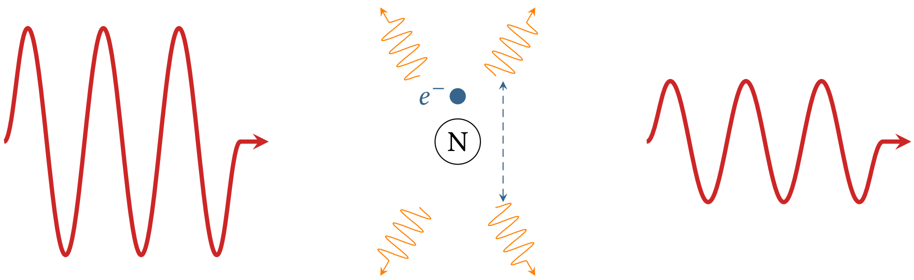


Figure 1 – Schéma de principe de la diffusion d'une onde électromagnétique.

Dans l'ensemble de l'exercice, on raisonne sur un électron appartenant à un atome dont on suppose le noyau fixe dans le référentiel d'étude, considéré galiléen. Cet électron est décrit par un point matériel M, dont le mouvement est supposé unidimensionnel le long d'un axe (Ox).

Données :
- charge élémentaire : $e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$;
- masse de l'électron : $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$;
- vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3{,}00 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$;
- permittivité diélectrique du vide : $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F \cdot m^{-1}}$.

1 - Calcul préalable. La valeur moyenne d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de période T est définie par

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

On peut remarquer le moyennage est une opération linéaire : pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^2$,

$$\langle \lambda\, f(t) + \mu\, g(t) \rangle = \lambda\, \langle f(t) \rangle + \mu\, \langle g(t) \rangle\ .$$

Calculer $\left\langle \cos^2(\omega t + \varphi) \right\rangle$ et $\left\langle \sin^2(\omega t + \varphi) \right\rangle$, avec $\omega = 2\pi/T$.

A - Un premier modèle

En première approche, les interactions de l'électron avec son environnement sont modélisées comme décrit ci-dessous.

- Le champ électrique de l'onde électromagnétique excitatrice est supposé uniforme à l'échelle de l'atome,

$$\vec{E}_{\mathrm{OEM}}(t) = E_0 \cos(\omega t)\, \vec{e}_x\,.$$

- L'électron ressent également un champ électrique créé par le noyau et les autres électrons de l'atome, relié à son vecteur position $\overrightarrow{OM}$ par

$$\vec{E}_{\mathrm{N}} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0\, a_0^3} \overrightarrow{OM}, \qquad \text{ou} \qquad a_0 \sim 10^{-10}\,\mathrm{m}\,.$$

- Le rayonnement fait perdre de l'énergie à l'électron, ce que l'on modélise par une force de frottement linéaire

$$\vec{f}_{\mathrm{ray}} = -\gamma m \vec{v} \qquad \text{ou} \qquad \gamma \sim 10^8\,\mathrm{s}^{-1}\,.$$

2 - Rappeler l'ordre de grandeur du rayon d'un atome [1] et celui des longueurs d'onde du domaine visible. Justifier qu'il est légitime de considérer le champ de l'onde excitatrice uniforme à l'échelle de l'atome.

3 - Vous montrerez l'an prochain que le champ magnétique de l'onde excitatrice s'écrit

$$\vec{B}_{\mathrm{OEM}} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t)\, \vec{e}_y\,.$$

Justifier (sans revenir aux unités de base !) que l'expression est homogène.

4 - Exprimer la force $\vec{F}_{\mathrm{OEM}}$ exercée sur l'électron par l'onde électromagnétique. À quelle condition la composante magnétique est-elle négligeable ? On suppose cette condition remplie par la suite.

5 - Établir l'équation du mouvement de l'électron portant sur sa position $x(t)$. Identifier la pulsation propre ω_0, le facteur de qualité Q et les calculer numériquement.

6 - En déduire l'amplitude complexe $\underline{X}$ de $x(t)$ en régime sinusoïdal établi sous la forme

$$\underline{X} = \frac{\underline{X}_0}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2} + \dfrac{\mathrm{j}\omega}{Q\omega_0}}\,.$$

B - Le ciel est bleu !

On s'intéresse dans cette partie plus particulièrement à la diffusion par l'atmosphère du rayonnement solaire : l'onde électromagnétique excitatrice est donc une onde du domaine visible.

7 - Rappeler les longueurs d'onde extrêmes du domaine visible et les couleurs correspondantes. En déduire les valeurs extrêmes de la pulsation ω de l'onde excitatrice.

8 - Comparer les ordres de grandeur pour simplifier l'expression de $\underline{X}$ et en déduire que

$$x(t) \simeq -\frac{eE_0}{m\omega_0^2} \cos(\omega t)\,.$$

1. Plutôt que de dire une bêtise, allez chercher la valeur, et retenez-là ☺

La puissance diffusée dépend de l'accélération de l'électron par l'intermédiaire de la *formule de Larmor*[2]

$$\mathcal{P}(t) = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\,\ddot{x}(t)^2\,.$$

9 - Calculer la puissance moyenne diffusée $\langle\mathcal{P}\rangle$.

10 - À partir de l'expression précédente, interpréter la couleur bleue du ciel. L'explication sera avantageusement accompagnée d'un schéma.

C - Effet du rayonnement

Le modèle discuté précédement souffre en réalité d'une incohérence : la puissance rayonnée $\mathcal{P}(t)$ devrait s'identifier à l'opposé de la puissance de la force de rayonnement $\vec{f}_{\text{ray}}$, ce qui n'est pas le cas. Même si ce modèle donne des conclusions qualitatives intéressantes[3], aller plus loin demande de modifier la loi de force. Une amélioration possible consiste à prendre une loi de force proportionnelle à la dérivée temporelle de l'accélération,

$$\vec{f}_{\text{ray}} = K\frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t}\,.$$

11 - Expliquer par un argument physique pourquoi les deux puissances doivent être opposées.

12 - Calculer la puissance moyenne $\langle\mathcal{P}_{\text{ray}}\rangle = \left\langle\vec{f}_{\text{ray}}\cdot\vec{v}\right\rangle$ de la force de rayonnement dans l'hypothèse d'un mouvement sinusoïdal $x(t) = X_\mathrm{m}\cos(\omega t+\varphi)$. Déterminer la constante K permettant de retrouver la puissance moyenne prévue par la formule de Larmor.

13 - Établir l'expression modifiée de l'amplitude complexe $\underline{X}$ en régime établi.

14 - En raisonnant sur un signal sinusoïdal générique $s(t) = S_\mathrm{m}\cos(\omega t+\varphi)$, montrer que

$$\left\langle s(t)^2\right\rangle = \frac{|\underline{S}|^2}{2}\,.$$

15 - En déduire l'expression de la puissance rayonnée $\langle\mathcal{P}\rangle$ en fonction la pulsation ω de l'onde excitatrice, en utilisant l'amplitude complexe $\underline{X}$ et la formule de Larmor[4]. Justifier qu'il existe nécessairement une pulsation pour laquelle le phénomène est résonant. On ne cherchera pas à déterminer ladite pulsation, mais on se contentera de prouver son existence.

2. Que vous retrouverez en MP-MP*.

3. La raison profonde est que dans le domaine des longueurs d'onde visibles la force de rayonnement est négligeable, donc peu importe que son expression ne soit pas complètement correcte.

4. Le calcul pourrait tout aussi bien être mené avec les grandeurs réelles comme à la question 9, mais je voudrais que vous le fassiez d'une façon différente (qui aurait aussi pu être utilisée précédemment).