





Filtrage mécanique

Travailler avec vos cours et TD ouverts est **chaudement recommandé** : un DM est un entraînement, pas une évaluation. Réfléchir ensemble est une bonne idée, mais le travail de rédaction doit être individuel. En cas de besoin, **n'hésitez pas à me poser des questions**, idéalement à la fin d'un cours ou éventuellement par mail.

Ceinture		Travail à réaliser
	Ceinture blanche	En entier
	Ceinture jaune	En entier
	Ceinture rouge	Au choix : en entier ou sujet X MPI 2023
	Ceinture noire	Au choix : en entier ou sujet X MPI 2023

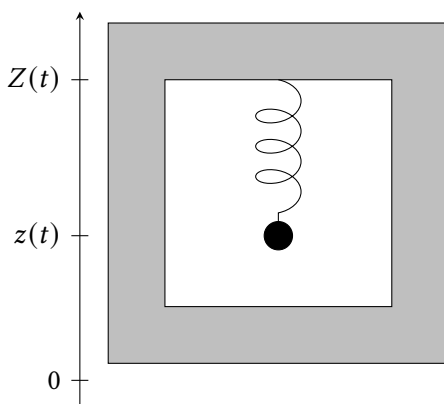


Flasher ou cliquer pour accéder au corrigé

Sismographe

Les sismographes ou sismomètres sont des instruments scientifiques conçus pour détecter et enregistrer les vibrations du sol provoquées par les séismes, les éruptions volcaniques ou certaines activités humaines (forages, prospection pétrolière, explosions, etc.). Les modèles modernes utilisent des capteurs numériques couplés à des systèmes informatiques capables d'analyser les signaux en temps réel. Ces technologies permettent une mesure précise de l'amplitude, de la durée et de la fréquence des ondes sismiques.

En général, une station est équipée de trois capteurs orientés selon trois directions (nord-sud, est-ouest et vertical). Cela permet d'enregistrer le mouvement du sol en trois dimensions et d'analyser précisément les ondes sismiques reçues. Certaines stations combinent aussi différents types d'instruments, par exemple un sismomètre très sensible pour les faibles vibrations et un accéléromètre pour les forts séismes.



On s'intéresse dans cet exercice à un sismographe vertical, constitué d'un bâti solide du sol auquel est lié une pièce déformable pouvant osciller. Un système d'acquisition fixe par rapport au bâti enregistre la position de l'extrémité mobile de la pièce au cours du temps. On le modélise de manière simplifiée par une masse suspendue à un ressort de raideur k et longueur à vide ℓ_0 . Lors d'un séisme, les vibrations du sol mettent le bâti en mouvement et par suite la masse suspendue.

On repère les positions sur un axe vertical ascendant, dont l'origine $z = 0$ reste constamment fixe dans le référentiel terrestre. On note $Z(t)$ la position du point d'attache du ressort, qui peut varier sous l'effet des vibrations du sol, et $z(t)$ la position de la masse.

Outre son poids et la force de rappel du ressort, la masse suspendue est soumise à une force d'amortissement linéaire (souvent d'origine magnétique) de la forme

$$\vec{f} = \lambda \frac{d\ell}{dt} \vec{e}_z$$

où $\ell(t) > 0$ est la longueur instantanée du ressort et λ un coefficient constant, mais réglable à la conception du sismomètre.

A - Réponse harmonique du sismomètre

- 1 - Établir la longueur ℓ_{eq} du ressort au repos en l'absence de séisme.
- 2 - Établir l'équation du mouvement reliant $z(t)$, $Z(t)$ et leurs dérivées.
- 3 - Le système d'acquisition mesure l'allongement du ressort par rapport à sa longueur au repos $\xi(t) = \ell(t) - \ell_{\text{eq}}$. Montrer que ξ vérifie une équation différentielle de la forme

$$\ddot{\xi} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = \ddot{Z}.$$

On considère une onde sismique sinusoïdale de pulsation ω , et on suppose atteint le régime établi.

- 4 - Établir la fonction de transfert mécanique du sismomètre $\underline{H} = \underline{\xi}/\underline{Z}$. En déduire la nature du filtrage mécanique réalisé par le sismomètre.
- 5 - Bien que fonctionnant tous sur le même principe, certains sismomètres sont capables de mesurer les vibrations du sol et d'autres son accélération. Expliquer. Peut-on mesurer la vitesse du sol avec cette technologie ?
- 6 - Tracer sur votre copie l'allure qualitative du diagramme de Bode en gain et en phase du sismomètre en fonction de la pulsation réduite ω/ω_0 , pour $Q = 0,1$, $Q = 1/\sqrt{2}$ et $Q = 10$. Laquelle de ces valeurs vous semble préférable ? Pourquoi ? En déduire la valeur à donner au coefficient d'amortissement λ .

B - Reconstruction d'un signal sismique

Considérons un sismomètre de pulsation propre $\omega_0 = 20 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Il enregistre le signal $\xi(t)$ représenté figure 1, dont les spectres (très simplifiés !) d'amplitude et de phase sont représentés 2.

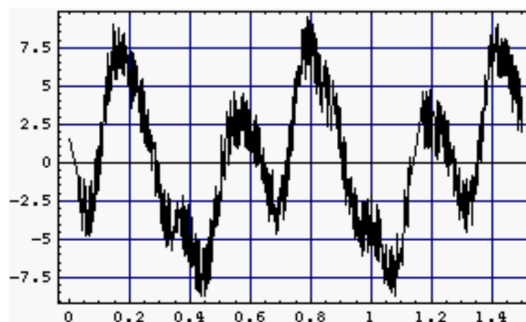


Figure 1 – Signal enregistré par le sismomètre. L'axe des abscisses est gradué en secondes, celui des ordonnées en millimètres.

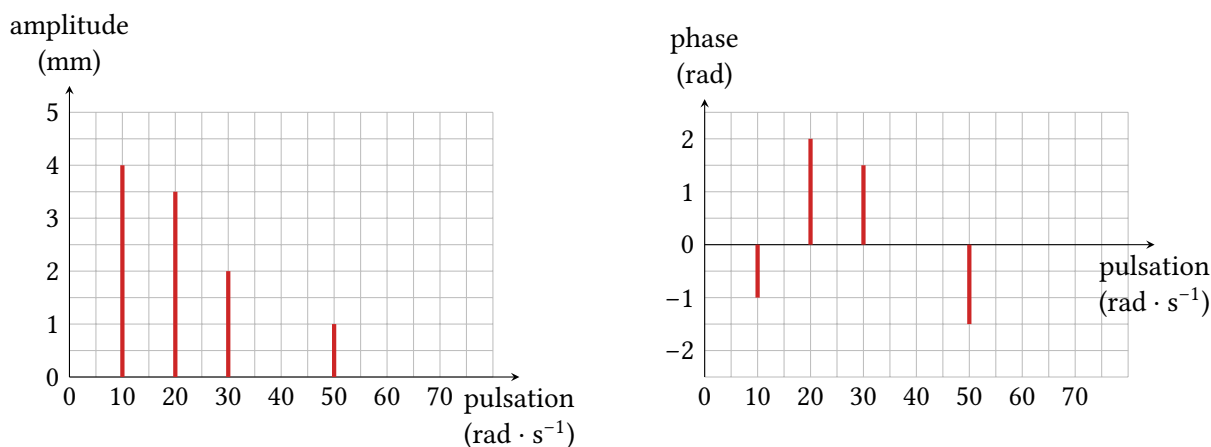


Figure 2 – Spectre du signal enregistré par le sismomètre.

- 7 - On souhaite écrire le signal $\xi(t)$ sous la forme d'un développement en série de Fourier,

$$\xi(t) = a_0 + \sum_n a_n \cos(n\omega t + \varphi_n).$$

Indiquer les valeurs de n , a_n et φ_n à prendre en considération.

8 - En expliquant le raisonnement, en déduire les valeurs numériques¹ de n , b_n et θ_n à considérer pour écrire le signal sismique $Z(t)$ sous la forme

$$Z(t) = b_0 + \sum_n b_n \cos(n\omega t + \theta_n).$$

9 - Représenter sur votre copie les spectres d'amplitude et de phase de $Z(t)$ sur un diagramme analogue à la figure 2.

1. Utilisez la calculatrice.