Mécanique des solides

Tartine à la confiture

Système : tartine ;

Référentiel : terrestre, supposé galiléen.

1 La force de réaction $\vec{R}$ s'applique au point O de contact entre la tartine et la table, qui est fixe, d'où

$$\boxed{\mathcal{P}(\vec{R}) = \vec{R} \cdot \vec{v}_O = 0\,.}$$

> *Lorsque l'on parle d'un solide, le point à considérer dans les expressions des travaux ou des énergies potentielles est le point où s'applique la force en question. Un autre raisonnement possible consiste à remarquer que $\mathcal{M}_y(\vec{R}) = 0$ car $\vec{R}$ s'applique en un point de l'axe de rotation, donc*
>
> $$\mathcal{P}(\vec{R}) = \mathcal{M}_y(\vec{R})\,\dot\theta = 0$$

La tartine est soumise à son poids $\vec{P}$, qui est conservatif, et à la force de réaction de la table, qui ne travaille pas. Son mouvement est donc conservatif. Comme elle est en mouvement de rotation autour de (Oy), son énergie mécanique vaut

$$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}J\dot\theta^2 + mgz_G = \frac{1}{2}J\dot\theta^2 + mge\cos\theta$$

en choisissant nulle la constante additive.

> *Pour les mêmes raisons que précédemment, il est indispensable d'écrire que le « z » à considérer dans l'expression de l'énergie potentielle est z_G. Ne pas le faire est une erreur.*

On détermine sa valeur à l'aide de la condition initiale ($\theta = 0$, $\dot\theta = 0$),

$$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}J\dot\theta^2 + mge\cos\theta \underset{\uparrow \atop \mathrm{CI}}{=} mge \qquad \text{d'où} \qquad \dot\theta^2 = \frac{2mge(1-\cos\theta)}{J}$$

et en remplaçant le moment d'inertie par son expression

$$\boxed{\dot\theta^2 = \frac{6ge(1-\cos\theta)}{a^2+4e^2}\,.}$$

2 Appliquons le théorème du moment cinétique à la tartine par rapport à son axe de rotation (Oy). La force de réaction de la table est appliquée en O, son moment par rapport à (Oy) est donc nul. Le poids s'applique en G, avec un bras de levier $e\sin\theta$, si bien que son moment par rapport à (Oy) vaut

$$\mathcal{M}_y(\vec{P}) = +mge\sin\theta$$

> *Il est aussi possible de passer par une projection,*
>
> $$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) = \vec{OG} \wedge m\vec{g} = mge\,\vec{e}_{z'} \wedge (\sin\theta\,\vec{e}_{x'} - \cos\theta\,\vec{e}_{z'}) = mge\sin\theta\,\vec{e}_y$$

D'après le théorème du moment cinétique,

$$J\ddot{\theta} = mge\sin\theta \qquad \text{soit} \qquad \frac{1}{3}m(a^2+4e^2)\ddot{\theta} = mge\sin\theta$$

et on aboutit finalement à

$$\boxed{\ddot{\theta} = \frac{3ge}{a^2+4e^2}\sin\theta}$$

Cette relation aurait pu s'obtenir de manière plus rapide par application du théorème de l'énergie mécanique, autrement dit en dérivant la relation établie à la question précédente :

$$2\dot{\theta}\ddot{\theta} = \frac{6ge}{a^2+4e^2}\dot{\theta}\sin\theta \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\ddot{\theta} = \frac{3ge}{a^2+4e^2}\sin\theta}$$

3 Puisque l'on cherche une force, appliquons le TRC à la tartine, soumise comme précédemment à son poids et à la force de réaction de la table. Comme il s'agit d'un solide, le TRC concerne l'accélération de son centre d'inertie G, dont le mouvement est circulaire de centre O.

> *Il est **indispensable** de préciser que l'accélération considérée est celle du centre d'inertie, parler simplement de $\vec{a}$ l'accélération de la tartine n'a pas de sens. Pour un solide en mouvement autre qu'une translation, le champ des accélérations n'est pas uniforme.*

Le plus simple pour décrire le mouvement est d'utiliser un repérage polaire de centre O, qui coïncide avec le repérage (x', z') lié à la tartine. Ainsi, comme $OG = e$,

$$\overrightarrow{OG} = e\,\vec{u}_{z'} \qquad \text{donc} \qquad \vec{v}_G = e\dot{\theta}\,\vec{u}_{x'} \qquad \text{et} \qquad \vec{a}_G = e\ddot{\theta}\,\vec{u}_{x'} - e\dot{\theta}^2\,\vec{u}_{z'}\,.$$

De plus, dans le répère lié à la tartine,

$$\vec{P} = mg\sin\theta\,\vec{u}_{x'} - mg\cos\theta\,\vec{u}_{z'}\,.$$

Ainsi, en projetant le TRC,

$$m\vec{a}_G = \vec{P} + \vec{R} \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} me\ddot{\theta} = R_x + mg\sin\theta \\ -me\dot{\theta}^2 = R_z - mg\cos\theta \end{cases} \qquad \text{donc} \qquad \begin{cases} R_x = me\ddot{\theta} - mg\sin\theta \\ R_z = -me\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta \end{cases}$$

et avec les résultats des questions précédentes

$$\boxed{\begin{cases} R_x = mg\left(\dfrac{3e^2}{a^2+4e^2} - 1\right)\sin\theta \\ R_z = mg\left(\cos\theta - \dfrac{6e^2(1-\cos\theta)}{a^2+4e^2}\right) \end{cases}}$$

Compte tenu des dimensions d'une tartine, typiquement $e \sim 0{,}5\,\mathrm{cm}$ et $a \sim 5\,\mathrm{cm}$,

$$\frac{e^2}{a^2+4e^2} \ll 1\,.$$

Par ailleurs, on devine (et on montre à la question suivante) que la tartine décolle de la table bien avant d'atteindre $\theta = \pi/2$. Cela permet de simplifier les expressions en

$$\boxed{\begin{cases} R_x = -mg\sin\theta \\ R_z = mg\cos\theta \end{cases}}$$

> *Évoquer la question suivante n'est pas indispensable, mais un commentaire sur les valeurs accessibles à l'angle θ est souhaitable : écrire quelque chose comme $\cos\theta \gg 0{,}01$ est faux en général.*

4 En prenant directement $\mu = 1$ et $0 \leq \theta \leq \pi/2$, la tartine ne glisse pas tant que

$$|R_x| \leq |R_z| \qquad \text{soit} \qquad mg\sin\theta \leq mg\cos\theta \qquad \text{d'où} \qquad \tan\theta \leq 1 \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\theta \leq \theta_0 = \frac{\pi}{4}}\,.$$

> *L'angle augmentant progressivement, la limite de glissement correspond au cas d'égalité ... et la loi du frottement change ensuite. Affirmer qu'il y a glissement $|R_x| > |R_z|$ et résoudre cette inégalité pour trouver l'angle limite est donc en toute rigueur faux, même si le calcul conduit au bon résultat ... et que vous ne pouvez pas vraiment le savoir cette année.*

Par ailleurs, on a montré que

$$\dot\theta^2 = \frac{6ge(1-\cos\theta)}{a^2+4e^2} \qquad \text{soit} \qquad \dot\theta_0 = \sqrt{\frac{6ge}{a^2+4e^2}\left(1-\frac{\sqrt2}{2}\right)}$$

qui se simplifie dans les mêmes approximations que précédemment sous la forme

$$\boxed{\dot\theta_0 = \sqrt{\frac{6ge}{a^2}\left(1-\frac{\sqrt2}{2}\right)} = 5{,}9\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}\,.}$$

5 Une fois que la tartine quitte la table, comme les frottements de l'air sont négligés, elle est en chute libre. Le TRC donne donc

$$m\,\vec a_G = \vec P = m\,\vec g$$

d'où en projetant sur l'axe z

$$\frac{\mathrm d^2 z_G}{\mathrm dt^2} = -g \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\mathrm d z_G}{\mathrm dt} = -gt + v_{G0z} \qquad \text{et} \qquad \boxed{z_G(t) = -\frac12 gt^2 + v_{0z}t + z_{G0}\,.}$$

Or à l'instant initial

$$\overrightarrow{OG}(t=0) = e\sin\theta_0\,\vec u_x + e\cos\theta\,\vec u_z \qquad \text{et} \qquad \vec v(t=0) = e\dot\theta_0\cos\theta_0\,\vec u_x - e\dot\theta_0\sin\theta_0\,\vec u_z\,.$$

ce qui permet d'aboutir à la loi horaire

$$\boxed{z_G(t) = -\frac12 gt^2 - e\dot\theta_0\sin\theta_0 t + e\cos\theta_0\,.}$$

> *Attention à ne pas faire d'hypothèses non justifiées, les approximations sont à expliciter dans un second temps ... et surtout à justifier ! En particulier, la vitesse initiale du centre de masse de la tartine n'est pas nulle à cause du mouvement de rotation, et possède deux composantes sur $\vec u_x$ et $\vec u_z$! Par conséquent, son mouvement n'est pas vertical, il y a aussi un décalage selon $\vec u_x$.*
>
> *Attention également à la lecture de l'énoncé : l'origine O du repère se trouve sur la table, pas au niveau du sol, qui est donc à une cote $z<0$.*

À l'instant où la tartine touche le sol, $z_G(\tau) \simeq -h$ (un des bords de la tartine touche probablement le sol avant son centre de masse). Puisque $h \gg e$, on peut faire l'hypothèse de négliger les deux termes proportionnels à e dans l'équation donnant accès à τ :

$$\left|-e\dot\theta_0\sin\theta_0\tau + e\cos\theta_0\right| \ll \frac12 g\tau^2\,.$$

On obtient alors

$$-\frac12 g\tau^2 \simeq -h \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\tau \simeq \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0{,}45\,\mathrm s\,.}$$

> *Toutes les valeurs étant connues, il est possible de résoudre exactement l'équation polynômiale de degré 2 donnant τ ... ce qui mène quasiment au même résultat : la modification porte seulement sur le troisième chiffre « significatif », qui ne l'est pas tant que ça puisque l'on travaille avec des ordres de grandeur.*

6 Comme à tout instant $\dot\theta(t) = \dot\theta_0$, l'intégration est directe et donne

$$\theta(t) = \dot\theta_0\, t + \theta_0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\theta(t) = \frac{\pi}{4} + t\sqrt{\frac{6ge}{a^2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}\,.}$$

Pour conclure, calculons l'angle θ à l'instant où la tartine touche le sol en supposant $h \sim 1\,\mathrm{m}$,

$$\theta(\tau) = \frac{\pi}{4} + \sqrt{\frac{12he}{a^2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = 3{,}4\,\mathrm{rad} \simeq 200°\,.$$

Comme $90° < \theta(\tau) < 270°$, alors la tartine **retombe sur le sol côté confiture** ... évidemment ! ! !

7 L'angle $\theta(\tau)$ ne dépend pas de g, donc si les tables et les tartines martiennes font la même taille que sur Terre, les tartines à la confiture retombent du mauvais côté même sur Mars.