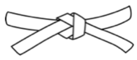
Mécanique des solides

Travailler avec vos cours et TD ouverts est ***chaudement recommandé*** *: un DM est un entraînement, pas une évaluation. Réfléchir ensemble est une bonne idée, mais le travail de rédaction doit être individuel. En cas de besoin,* ***n'hésitez pas à me poser des questions****, idéalement à la fin d'un cours ou éventuellement par mail.*

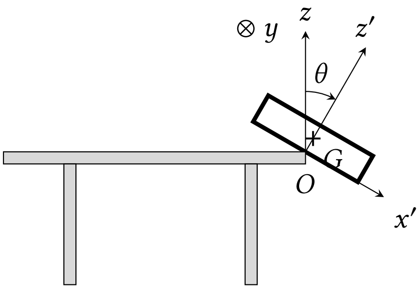
Ceinture		Travail à réaliser
	Ceinture blanche	En entier
	Ceinture jaune	En entier
	Ceinture rouge	En entier
	Ceinture noire	En entier

Flasher ou cliquer pour accéder au corrigé

Tartine à la confiture

Le théorème de la tartine à la confiture, plus largement connu sous le nom de loi de Murphy, est une loi empirique bien connue[1] qu'on pourrait énoncer sous la forme « Tout ce qui est susceptible de mal se passer se passera mal ». L'objectif de cet exercice est de montrer que la loi de Murphy a de bonnes raisons d'être vérifiée, au moins en ce qui concerne les tartines à la confiture.

Attention ! Dans tout cet exercice de « vraie » mécanique du solide, vous serez particulièrement vigilant au point d'application des différentes forces ... et je rappelle à tout hasard que parler de « la » vitesse ou « la » accélération d'un solide n'a en général pas de sens.



Votre tartine amoureusement préparée est modélisée par un parallélépipède de masse m, de longueur $2a$ dans la direction (Ox'), de largeur $2b$ dans la direction (Oy) et d'épaisseur $2e$ dans la direction (Oz'). Elle est posée sur une table de hauteur h, quand votre voisin(e) (encore lui/elle !) la pousse vers le bord. Quand le milieu de la tartine atteint le bord de la table (avec une vitesse négligeable pour simplifier), elle entame une rotation autour de l'axe (Oy). Dans un premier temps, la tartine ne glisse pas sur la table pendant la rotation.

L'action mécanique de la table sur la tartine est modélisée par une force de réaction

$$\vec{R} = R_x \vec{u}_{x'} + R_z \vec{u}_{z'}$$

dont O est le point d'application. L'inclinaison de la tartine est repérée par l'angle θ. Le moment d'inertie de la tartine par rapport à l'axe Oy vaut

$$J = \frac{1}{3} m (a^2 + 4e^2)\,.$$

1. De nombreuses « conséquences » sont à découvrir sur la page Wikipédia. Vive les chats beurrés !

1 - Montrer que la puissance de la force de réaction $\vec{R}$ est nulle. En déduire que

$$\dot{\theta}^2 = \frac{6ge(1-\cos\theta)}{a^2+4e^2}\,.$$

2 - Appliquer le théorème du moment cinétique pour déterminer une relation entre $\ddot{\theta}$ et $\sin\theta$. Comment aurait-on pu établir cette relation beaucoup plus rapidement ?

3 - Montrer que

$$R_x = mg\left(\frac{3e^2}{a^2+4e^2}-1\right)\sin\theta \qquad \text{et} \qquad R_z = mg\left(\cos\theta - \frac{6e^2(1-\cos\theta)}{a^2+4e^2}\right)\,.$$

Simplifier ces expressions en tenant compte des dimensions réelles d'une tartine.

4 - La loi de Coulomb du frottement solide indique que la tartine ne glisse pas tant que $|R_x| \leq \mu\,|R_z|$ où $\mu \simeq 1$ est le coefficient de frottement solide. Déterminer l'angle θ_0 à partir duquel la tartine commence à glisser et la vitesse angulaire de la tartine $\dot{\theta}_0$ à cet instant.

À partir de cet instant pris comme origine des temps $t = 0$, la tartine quitte la table en un temps très bref en conservant quasiment la même orientation θ_0 et la même vitesse angulaire $\dot{\theta}_0$. On suppose que la tartine ne retouche plus la table.

5 - Déterminer la loi horaire $z_G(t)$, où G est le centre d'inertie de la tartine, une fois qu'elle a quitté la table. En déduire que l'instant τ auquel la tartine touche le sol est tel que

$$\tau \simeq \sqrt{\frac{2h}{g}}\,.$$

6 - Supposons que pendant la phase de vol la vitesse angulaire de la tartine reste constamment égale à $\dot{\theta}_0$. Déterminer la loi horaire $\theta(t)$. Conclure : de quel côté la tartine tombe-t-elle ?

7 - Deux martiens prennent leur petit-déjeuner. Qu'arrive-t-il à leurs tartines à la confiture ?