

Induction mutuelle

Pince ampèremétrique

1 Soit M un point quelconque de l'espace.

- Le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie de la distribution de courant, donc $\vec{B}(M)$ est porté par \vec{e}_θ .
- La distribution de courant est invariante par translation le long de (Oz) et par rotation autour de cet axe, donc B_θ ne dépend ni de z ni de θ .
- Les lignes de champ sont circulaires, d'autant plus éloignées que la distance au fil augmente car l'intensité du champ diminue, voir figure 1.

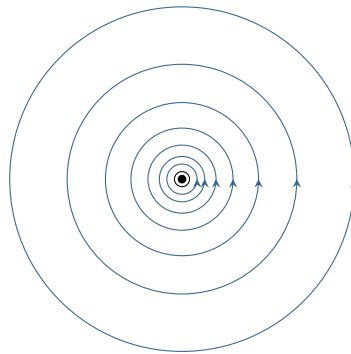


Figure 1 – Champ créé par le fil (1).

2 • **Première méthode : utilisation d'un découpage mésoscopique.** Compte tenu de l'orientation de i_2 , le vecteur normal à la spire est \vec{e}_θ . On en déduit le flux $d\varphi_{12}$ au travers d'une bande élémentaire,

$$d\varphi_{12} = \vec{B}_1(r) \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r} \times a dr.$$

Le flux $d\varphi_{12}$ étant infinitésimal et $d\vec{S}$ également, il n'y a pas lieu de mettre de symbole d'intégrale dans son expression.

Le flux φ_{12} au travers d'une spire s'en déduit par somme sur toutes les bandes élémentaires,

$$\varphi_{12} = \int d\varphi_{12} = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi} a \int_{r_0}^{r_0+a} \frac{dr}{r} \quad \text{soit} \quad \varphi_{12} = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi} a \ln \left(1 + \frac{a}{r_0} \right)$$

Le raisonnement est identique pour chaque spire et conduit au même résultat, d'où

$$\Phi_{12} = N\varphi_{12} = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi} Na \ln \left(1 + \frac{a}{r_0} \right) \quad \text{et} \quad M = \frac{\mu_0 Na}{2\pi} \ln \left(1 + \frac{a}{r_0} \right).$$

• **Seconde méthode : expression du vecteur surface élémentaire.** Nous ne l'avons pas fait ensemble, mais à partir du moment où vous l'avez vu en SI, il n'est pas interdit de s'en servir. La spire étant de normale \vec{e}_θ ,

$$d\vec{S} = dr dz \vec{e}_\theta.$$

Ainsi,

$$\varphi_{12} = \iint \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi} \times \int_{r_0}^{r_0+a} \frac{dr}{r} \times \int_{-a/2}^{+a/2} dz = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi} a \ln \left(1 + \frac{a}{r_0} \right)$$

ce qui mène évidemment au même résultat.

3 Voir figure 2. On note ici le générateur comme une source idéale de courant, mais représenter une source de tension est raisonnable également.

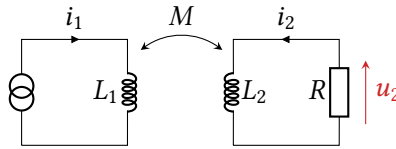


Figure 2 – Schéma électrique équivalent à la pince ampèremétrique.

4 Par la loi des mailles et la loi de comportement de la bobine L_2 ,

$$u_2 + L \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = 0 \quad \text{soit} \quad \underline{U}_2 = -jL\omega \underline{I}_2 - jM\omega \underline{I}_1.$$

Or $\underline{I}_2 = \underline{U}_2/R$, d'où

$$\underline{U}_2 + \frac{jL\omega}{R} \underline{U}_2 = -jM\omega \underline{I}_1$$

et ainsi

$$\underline{U}_2 = -\frac{jM\omega}{1 + \frac{jL\omega}{R}} \underline{I}_1.$$

Une pince ampèremétrique **ne peut pas mesurer un courant continu**, puisque $\underline{U}_2 = 0$ pour $\omega = 0$.

5 Soit M un point quelconque de l'espace.

- Le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie de la distribution de courant, donc $\vec{B}(M)$ est porté par \vec{e}_θ ;
- La distribution de courant est invariante par rotation autour de l'axe (Oz) , donc $\vec{B}(M)$ est indépendant de la coordonnée angulaire θ ;
- en conclusion :

$$\vec{B}_2(M) = B_\theta(r, z) \vec{e}_\theta.$$

La distribution de courant créant le champ \vec{B}_2 et dont il faut analyser les symétries est la totalité du bobinage (2), et pas seulement une unique spire.

Cette distribution n'est clairement pas invariante par translation le long de l'axe (Oz) ! D'ailleurs, l'expression donnée dépend bien de r et de z , cette dépendance étant « cachée » dans la disjonction à l'intérieur/à l'extérieur de la bobine.

6 Le calcul du flux est exactement analogue à celui de la question 2. Le flux du champ \vec{B}_2 au travers du bobinage (2) s'écrit

$$\Phi_{22} = N\varphi_{22} = N \times \frac{\mu_0 i_2}{2\pi} N a \ln \left(1 + \frac{a}{r_0} \right) \quad \text{d'où} \quad L_2 = \frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi} \ln \left(1 + \frac{a}{r_0} \right).$$

7 Dans la limite des hautes fréquences $\omega \gg R/L$,

$$\underline{U}_2 = -\frac{jM\omega}{\frac{jL\omega}{R}} \underline{I}_1 = -R \frac{M}{L} \underline{I}_1.$$

Compte tenu des calculs précédents, $M/L = 1/N$ donc

$$\boxed{\underline{U}_2 = -\frac{R}{N}\underline{I}_1.}$$

Sous réserve que la fréquence soit suffisante, la tension \underline{U}_2 est directement proportionnelle au courant à mesurer, et le coefficient de proportionnalité est fixé par construction de la pince ampèremétrique, indépendamment des conditions dans lesquelles elle est utilisée.

8 Par définition,

$$\Phi_{21} = \iint_{(1)} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_1$$

où $d\vec{S}_1$ est porté par \vec{e}_θ compte tenu de l'orientation du courant dans le fil. Le champ \vec{B}_2 étant nul à l'extérieur de la bobine, seule la portion du plan du circuit (1) coïncidant avec une spire du bobinage (2) contribue à l'intégrale.

On a alors

$$\Phi_{21} = \varphi_{22} = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi} Na \ln\left(1 + \frac{a}{r_0}\right) \quad \text{d'où} \quad M' = \frac{\mu_0 Na}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{r_0}\right)$$

On trouve la même expression qu'à la question 2, ce qui est attendu en vertu du théorème de Neumann.

Notons qu'on trouve la même expression finale, mais bien sûr le détail du calcul diffère.

9 Les arguments précédents s'appliquent quelle que soit la position du fil vis-à-vis de la bobine : on aura toujours le même coefficient d'induction mutuelle, et donc les mêmes équations électriques. Le fonctionnement de la pince n'est donc **pas affecté par la position exacte du fil** ... ce qui est souhaitable pour une utilisation pratique.