

Principe fondamental de la dynamique

I - Jeu de balle

- **Système** : balle ;
- **Référentiel** : terrestre, supposé galiléen.

I.A - Première phase : mouvement sous l'eau

1 • Bilan des forces :

- ▷ poids $\vec{P} = m\vec{g} = \rho V \vec{g}$ avec ρ la masse volumique de la balle et V son volume ;
- ▷ poussée d'Archimède $\vec{\Pi} = -\rho V \vec{g}$ avec ρ la masse volumique du fluide, égale à celle de la balle et V le volume de la balle ;
- ▷ force de frottement : $\vec{f} = -\lambda \vec{v}$.

• PFD :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{\Pi}_A + \vec{f} \quad \text{soit} \quad \frac{d\vec{v}}{dt} + \underbrace{\frac{\lambda}{m}}_{=1/\tau} \vec{v} = \vec{0}.$$

Attention, il n'est pas possible de considérer le mouvement unidimensionnel ($\vec{v} = v \vec{e}_x$) ! Il n'y a aucune raison a priori que le vecteur vitesse ne puisse pas changer de direction au cours du mouvement, c'est un résultat à établir en tant que conséquence du PFD.

2 Les deux composantes v'_x et v'_z vérifient la même équation différentielle ($i = x$ ou z),

$$\frac{dv'_i}{dt} + \frac{1}{\tau} v'_i = 0 \quad \text{d'où} \quad v'_i = A_i e^{-t/\tau}.$$

Cependant, la constante diffère à cause de la condition initiale :

▷ pour la composante v'_x :

$$v'_x(t=0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{expr}}}{=} A_x \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{=} v_0 \quad \text{d'où} \quad v'_x(t) = v_0 e^{-t/\tau}.$$

▷ pour la composante v'_z :

$$v'_z(t=0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{expr}}}{=} A_z \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{=} 0 \quad \text{d'où} \quad v'_z(t) = 0.$$

La vitesse reste constamment portée par le vecteur $\vec{e}_x$, le mouvement de la balle est donc **rectiligne** tant qu'elle se trouve dans l'eau.

Il est également possible de procéder à une résolution complètement vectorielle :

$$\vec{v}(t) = \vec{A} e^{-t/\tau} \quad \text{et} \quad \vec{v}(t=0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{=} \vec{v}_0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{expr}}}{=} \vec{A}$$

ce qui conduit à

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 e^{-t/\tau}.$$

Les deux projections de cette expression dans la base inclinée conduisent bien sûr aux mêmes résultats que ceux établis ci-dessus.

3 Procédons par séparation des variables,

$$\frac{dx'}{dt} = v_0 e^{-t/\tau} \quad \text{soit} \quad \int_0^{x'(t)} dx' = v_0 \int_0^t e^{-t/\tau} dt,$$

ce qui donne

$$x'(t) - 0 = v_0 \left[-\tau e^{-t/\tau} \right]_0^t = v_0 \left(-\tau e^{-t/\tau} + 1 \right)$$

d'où on conclut

$$x'(t) = v_0 \tau (1 - e^{-t/\tau}).$$

4 En raisonnant dans le triangle $OO'S$, on constate que la balle doit parcourir une distance $h/\tan \alpha$ le long de l'axe (Ox) pour atteindre la surface, soit

$$x_s = \frac{h}{\tan \alpha}.$$

De même, l'abscisse du point de sortie dans la base inclinée vaut

$$x'_s = \frac{h}{\sin \alpha}.$$

Introduisons l'instant de sortie t_s , tel que

$$x'(t_s) = v_0 \tau (1 - e^{-t_s/\tau}) = \frac{h}{\sin \alpha} \quad \text{soit} \quad 1 - e^{-t_s/\tau} = \frac{h}{v_0 \tau \sin \alpha} \quad \text{donc} \quad e^{-t_s/\tau} = 1 - \frac{h}{v_0 \tau \sin \alpha}.$$

Une exponentielle étant toujours positive, on en déduit que la balle ne sort de l'eau (mathématiquement, l'instant t_s n'existe) que si

$$\frac{h}{v_0 \tau \sin \alpha} < 1 \quad \text{soit} \quad v_0 > \frac{h}{\tau \sin \alpha}.$$

Si cette condition n'est pas remplie, la balle s'arrête et flotte entre deux eaux, puisque son poids et la poussée d'Archimède se compensent exactement. En revenant à l'expression de la vitesse, on trouve

$$v_s = v_0 \left(1 - \frac{h}{v_0 \tau \sin \alpha} \right).$$

La condition sur la vitesse peut également s'établir en raisonnant sur l'expression de x' : pour que la balle sorte de l'eau, il faut que

$$x'(t \rightarrow \infty) > x'_s \quad \text{soit} \quad v_0 \tau > \frac{h}{\sin \alpha}$$

ce qui redonne bien sûr le même résultat.

I.B - Seconde phase : mouvement dans l'air

5 Établissons l'équation de la trajectoire de la balle, qui quitte l'eau en formant un angle α avec l'horizontale. Les lois horaires sont donc

$$\begin{cases} x(t) = v_s t \cos \alpha + x_s \\ z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_s t \sin \alpha \end{cases}$$

On en déduit

$$t = \frac{x - x_s}{v_s \cos \alpha}$$

puis l'équation de la trajectoire

$$z = -\frac{1}{2}g \frac{(x - x_s)^2}{v_s^2 \cos^2 \alpha} + v_s \frac{x - x_s}{v_s \cos \alpha} \sin \alpha = -\frac{1}{2}g \frac{(x - x_s)^2}{v_s^2 \cos^2 \alpha} + (x - x_s) \tan \alpha$$

Le panier est atteint s'il se trouve sur la trajectoire, soit

$$H = -\frac{1}{2}g \frac{(D - x_s)^2}{v_s^2 \cos^2 \alpha} + (D - x_s) \tan \alpha.$$

6 Par définition,

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha.$$

L'équation devient donc

$$H = -\frac{1}{2}g \frac{(D - x_s)^2}{v_s^2} (1 + \tan^2 \alpha) + (D - x_s) \tan \alpha$$

ce qui se réécrit enfin

$$\frac{g(D - x_s)^2}{2v_s^2} u^2 - (D - x_s)u + \left(\frac{g(D - x_s)^2}{2v_s^2} + H \right) = 0.$$

7 Le panier est atteint s'il existe un angle α vérifiant cette équation, ce qui nécessite que son discriminant soit positif :

$$\begin{aligned} (D - x_s)^2 - 4 \frac{g(D - x_s)^2}{2v_s^2} \left(\frac{g(D - x_s)^2}{2v_s^2} + H \right) &\geq 0 \\ 1 - 2 \frac{g}{v_s^2} \left(\frac{g(D - x_s)^2}{2v_s^2} + H \right) &\geq 0 \end{aligned}$$

En multipliant par v_s^4 ,

$$v_s^4 - 2gHv_s^2 - g^2(D - x_s)^2 \geq 0.$$

L'étude du signe du discriminant revient à chercher pour quelles valeurs de v_s le membre de gauche de l'inégalité s'annule. S'agissant d'un polynôme du second degré en $\xi = v_s^2$, il y a annulation pour

$$\xi_{\pm} = \frac{2gH \pm \sqrt{4g^2H^2 + 4g^2(D - x_s)^2}}{2} = gH \pm g\sqrt{H^2 + (D - x_s)^2}$$

mais seule la racine positive est physiquement pertinente. Sachant que le préfacteur du terme $\xi^2 = v_s^4$ est positif, le discriminant est positif hors de l'intervalle $[\xi_-, \xi_+]$. En revenant à la vitesse, l'angle α permettant d'atteindre le panier n'existe donc que si

$$v_s > \sqrt{gH + g\sqrt{H^2 + (D - x_s)^2}}.$$

II - Freinage d'un avion de chasse

8 • **Système** : avion ;

• **Référentiel** : terrestre, supposé galiléen ;

• **Repérage** : cartésien, l'axe (Ox) étant dirigé dans le sens du mouvement et l'axe (Oz) vers le haut. Le mouvement étant plan,

$$\overrightarrow{OM} = x \vec{e}_x \quad \vec{v} = v \vec{e}_x = \dot{x} \vec{e}_x \quad \vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{e}_x = \ddot{x} \vec{e}_x.$$

• **Bilan des forces** :

- ▷ poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$;
- ▷ réaction de la piste, supposée normale : $\vec{N} = N\vec{e}_z$;
- ▷ force de traînée : $\vec{f} = -\frac{1}{2}\rho SC_x v^2 \vec{e}_x$.

• **PFD** : le mouvement étant horizontal, la réaction de la piste compense exactement le poids, donc

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{f}$$

ce qui conduit à

$$\frac{dv}{dt} + \underbrace{\frac{\rho SC_x}{2m}}_{=k} v^2 = 0.$$

9 Cette équation n'admet pas de forme canonique connue, mais peut être résolue par séparation des variables :

$$\int_{v_0}^{v(t)} -\frac{dv}{v^2} = k \int_0^t dt \quad \text{soit} \quad \frac{1}{v(t)} - \frac{1}{v_0} = kt \quad \text{et} \quad \frac{1}{v(t)} = kt + \frac{1}{v_0} = \frac{1 + v_0 kt}{v_0}$$

d'où

$$v(t) = \frac{v_0}{1 + v_0 kt}.$$

10 De même, déterminons la position $x(t)$ par séparation de variables,

$$\int_0^{x(t)} dx = \int_0^t \frac{v_0}{1 + v_0 kt} dt = \frac{1}{k} \int_0^t \frac{kv_0}{1 + v_0 kt} dt \quad \text{soit} \quad x(t) = \frac{1}{k} \ln \frac{1 + v_0 kt}{1}$$

On peut alors relier la vitesse à la position :

$$1 + kv_0 t = e^{kx} \quad \text{d'où} \quad v(x) = v_0 e^{-kx}.$$

11 Numériquement, sachant que $S = \pi D^2/4$ pour un cercle,

$$k = \frac{\rho \pi D^2 C_x}{8m} = 7,1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1}$$

d'où on obtient pour une piste de longueur $L = 2 \text{ km}$

$$v(L) = v_0 e^{-kL} = 16,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 58,3 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$$

Ainsi, notre modèle n'est pas cohérent avec le dimensionnement réel de la piste : il n'inclut pas les **forces de frottement dues aux roues**, aussi bien avec la piste elle-même qu'avec l'axe de rotation.