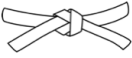
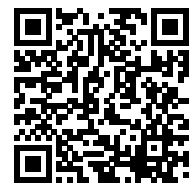


Principe fondamental de la dynamique

Travailler avec vos cours et TD ouverts est **chaudement recommandé** : un DM est un entraînement, pas une évaluation. Réfléchir ensemble est une bonne idée, mais le travail de rédaction doit être individuel. En cas de besoin, **n'hésitez pas à me poser des questions** lors des séances de soutien ou à la fin d'un cours.

Ceinture		Travail à réaliser
	Ceinture blanche	Questions 1 à 5
	Ceinture jaune	Questions 1 à 5
	Ceinture rouge	Tout sauf questions 6 et 7
	Ceinture noire	En entier



Flasher ou cliquer pour accéder au corrigé

I - Jeu de balle

Un parc aquatique propose à ses visiteurs d'envoyer une balle à l'aide d'un canon à ressort situé sous l'eau afin de la faire rentrer dans un panier hors de l'eau, voir figure 1. Le canon envoie la balle depuis un point O' situé à une profondeur h sous la surface, avec une vitesse $\vec{v}_0$ formant un angle α avec l'horizontale. Le panier à atteindre se trouve à une hauteur H au dessus de l'eau. On admet que le mouvement de la balle est plan, et on raisonnera dans les repères $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$ ou $(O', \vec{e}'_x, \vec{e}'_z)$ selon les questions.

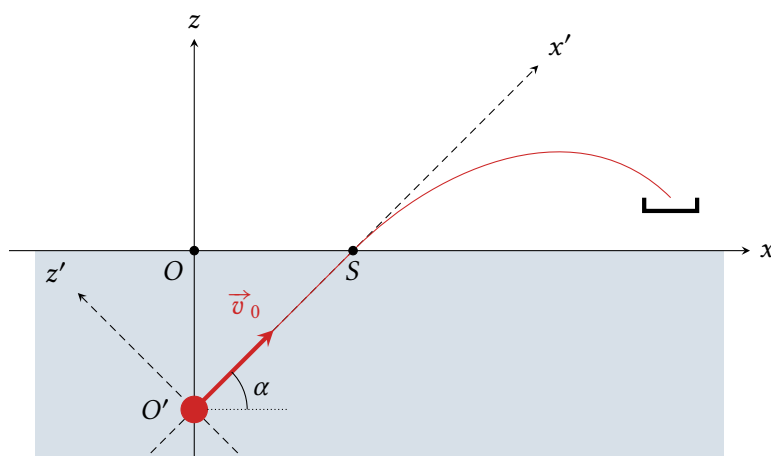


Figure 1 – Schéma de la situation.

I.A - Première phase : mouvement sous l'eau

On suppose que la balle et l'eau ont exactement la même masse volumique, et que l'eau exerce sur la balle une force de frottement linéaire $\vec{f} = -\lambda \vec{v}$.

1 - Établir l'équation différentielle vectorielle vérifiée par la vitesse $\vec{v}$ de la balle tant qu'elle reste sous l'eau. Identifier un temps caractéristique τ .

2 - Déterminer les composantes v'_x et v'_z dans le repère incliné. Que peut-on dire de la trajectoire de la balle lors de cette première phase ?

3 - Établir l'expression de la position $x'(t)$ au cours de la première phase.

4 - Déterminer en fonction de v_0 , h , α et τ l'abscisse x_s et la vitesse v_s à laquelle la balle sort de l'eau. Montrer que cela n'est possible que si la vitesse initiale v_0 est supérieure à une vitesse seuil à déterminer. Que se passe-t-il dans le cas inverse ?

I.B - Seconde phase : mouvement dans l'air

Notons D la distance horizontale entre le canon à ressort et le panier. S'agissant de calculs faits en cours, nous partons directement des équations horaires d'une chute libre pour un projectile lancé avec une vitesse initiale de norme $v(0)$ formant un angle φ avec l'horizontale, depuis un point de coordonnées $(x(0), z(0))$:

$$\begin{cases} x(t) = v(0) t \cos \varphi + x(0) \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v(0) t \sin \varphi + z(0) \end{cases}$$

Charge à vous d'adapter les notations à la situation étudiée.

5 - Montrer que la balle atteint le panier si sa hauteur H et la distance D vérifient

$$H = (D - x_s) \tan \alpha - \frac{g(D - x_s)^2}{2v_s^2 \cos^2 \alpha}.$$

6 - Réécrire cette équation comme une équation polynômiale d'ordre 2 portant sur la variable $u = \tan \alpha$.

7 - En déduire que le panier ne peut être atteint que si

$$v_s > \sqrt{g \left(H + \sqrt{H^2 + (D - x_s)^2} \right)}.$$

II - Freinage d'un avion de chasse

Un avion de chasse de masse $m = 9,0 \text{ t}$ en panne totale de freins atterrit à une vitesse $v_0 = 240 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Au moment où les roues touchent le sol, le réacteur est coupé et le pilote déploie un parachute de secours de diamètre $D = 3 \text{ m}$. La force de traînée du parachute a pour norme

$$f = \frac{1}{2} \rho S C_x v^2$$

avec v la vitesse de l'avion, S la surface projetée du parachute sur un plan perpendiculaire à la vitesse, $C_x = 1,5$ le coefficient de traînée supposé constant, et $\rho = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ la masse volumique de l'air. On pose

$$k = \frac{\rho S C_x}{2m}.$$

8 - Établir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse v de l'avion.

9 - En déduire l'expression de la vitesse en fonction du temps $v(t)$.

10 - Établir l'expression de la vitesse en fonction de la position $v(x)$.

11 - La piste d'un terrain d'aviation militaire a une longueur de l'ordre de 2 km , permettant un atterrissage sécurisé en toute circonstance. Déterminer la vitesse de l'avion prévue par notre modèle en bout de piste. Commenter : que manque-t-il à la modélisation ?