

Instruments d'optique

Imagerie par microscope

parties A et B inspirées ENS BCPST 2015

A - Conjugaison et grandissement du microscope

1 Voir figure 1. L'image intermédiaire est construite « par habitude », mais elle n'est pas nécessaire ici : comme $F'_O = F_T$, alors les rayons particuliers passant par les foyers de la lentille L_O sont aussi les rayons particuliers passant par les foyers de L_T , et suffisent donc à construire l'image finale $A''B''$. Autrement dit, seuls les rayons représentés en bleu et orange sont utiles, alors que les rayons vert et rouge auraient pu ne pas être tracés.

2 Raisonnons avec les notations de la figure 1. En raisonnant dans les triangles OIF'_O et TJF'_O , et en faisant attention aux signes,

$$\tan \alpha = \frac{\overline{OI}}{\overline{F'_O O}} = -\frac{\overline{AB}}{f'_O} \quad \text{et} \quad \tan \alpha = \frac{\overline{TJ}}{\overline{F'_O T}} = \frac{\overline{A''B''}}{f'_T}$$

d'où on déduit

$$\gamma = -\frac{f'_T}{f'_O} = -40.$$

Trouver $\gamma < 0$ signifie que l'image est renversée, ce qui est conforme au dessin.

L'énoncé demande une démonstration géométrique, c'est donc le raisonnement précédent qui est attendu, mais le résultat aurait aussi pu être démontré à l'aide de relations de grandissement :

$$\gamma = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{A'B'}} \times \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \left(-\frac{\overline{F'_O A'}}{f'_O} \right) \times \left(-\frac{f_T}{\overline{F_T A'}} \right)$$

ce qui se simplifie et conduit au résultat puisque F_T et F'_O sont confondus.

3 D'après la relation de conjugaison de Newton appliquée au deux lentilles,

$$\overline{F_O A} \overline{F'_O A'} = \varepsilon \overline{F'_O A'} = -f'^2_O \quad \text{et} \quad \overline{F_T A'} \overline{F'_T A''} = \overline{F_T A'} \varepsilon'' = -f'^2_T$$

Comme F_T et F'_O sont confondus, diviser ces deux relations conduit à

$$\frac{\varepsilon''}{\varepsilon} = \left(\frac{f'_T}{f'_O} \right)^2 \quad \text{soit} \quad \varepsilon'' = \left(\frac{f'_T}{f'_O} \right)^2 \varepsilon.$$

Une démonstration alternative utilise les relations de grandissement avec origine aux foyers,

$$\frac{\overline{A''B''}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{A'B'}} \times \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \left(-\frac{\overline{F'_T A''}}{f'_T} \right) \times \left(-\frac{f_O}{\overline{F_O A}} \right) = -\frac{\varepsilon''}{f'_T} \times \frac{f'_O}{\varepsilon}$$

et en utilisant l'expression du grandissement du microscope,

$$-\frac{f'_T}{f'_O} = -\frac{\varepsilon''}{f'_T} \times \frac{f'_O}{\varepsilon} \quad \text{d'où} \quad \varepsilon'' = \left(\frac{f'_T}{f'_O} \right)^2 \varepsilon.$$

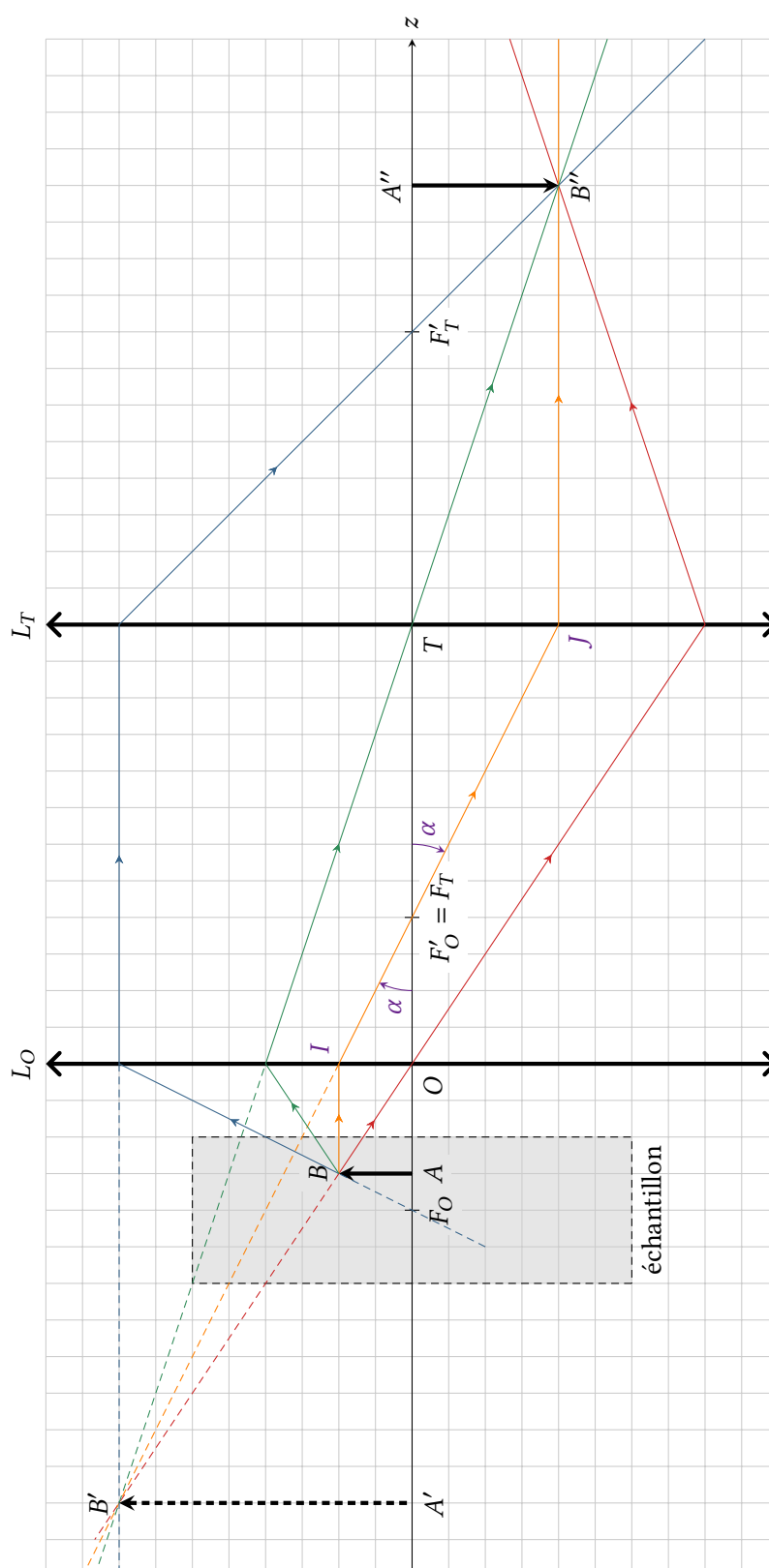


Figure 1 – Construction de l'image par le microscope. Rouge : rayon issu de B passant par O . Bleu : rayon issu de B passant par F_O , puis issu de B' et passant par F'_T . Orange : rayon issu de B passant par F'_O , puis issu de B' et passant par F_T . Vert : rayon issu de B' passant par T .

B - Résolution transversale

- 4] Puisque le capteur, et donc l'image finale, sont dans le plan focal image de L_T , alors l'image intermédiaire doit se trouver à l'infini, et donc l'objet dans le plan focal objet de L_O .

Il est également possible de le justifier avec la relation de conjugaison établie précédemment : si l'image est dans le plan focal image de L_T , alors $\varepsilon'' = 0$ et donc $\varepsilon = 0$, ce qui signifie que l'objet est dans le plan focal objet de L_O .

- 5] Pour que les deux molécules soient discernables, il faut avoir

$$A''B'' > \delta \quad \text{soit} \quad |\gamma| AB > \delta \quad \text{d'où} \quad \Delta x_g = \frac{\delta}{|\gamma|} = \delta \frac{f'_O}{f'_T} = 0,25 \mu\text{m}.$$

Attention à ne pas confondre l'inégalité pour que les deux molécules soient discernables avec la valeur limite Δx_g qui correspond au cas d'égalité.

- 6] Deux points sont discernables si leurs tâches de diffraction ne se recouvrent pas (ou peu). L'éclairement d'une tâche de diffraction n'étant pas uniforme, le critère que l'on retient usuellement (et qui porte même un nom, le critère de Rayleigh) est

$$A''B'' > d = \frac{\lambda f'_T}{D_T} \quad \text{d'où} \quad \Delta x_d = \frac{\lambda f'_T}{|\gamma| D_T} = \frac{\lambda f'_O}{D_T} = 0,33 \mu\text{m}.$$

On constate que les deux limites de résolution sont du même ordre de grandeur, ce semble cohérent du point de vue de la conception : optimiser considérablement l'un des deux aspects sans travailler l'autre ne servirait à rien, puisque l'instrument ne pourrait pas profiter du travail d'optimisation. Il est donc logique de chercher à atteindre la même valeur pour les deux limites, ce que confirme notre calcul.

C - Profondeur de champ

- 7] Pour qu'un point dont l'image ne se forme pas exactement sur le capteur apparaisse net, il faut que la tâche formée par les rayons les plus inclinés passant par ce point reste plus petite que le cercle de confusion du capteur. L'inclinaison des rayons est contrainte par le diamètre D_T de la lentille de tube. En raisonnant avec les notations de la figure 2 à gauche, et puisque $\varepsilon'_1 < 0$,

$$\tan \theta_1 = -\frac{D_T/2}{f'_T + \varepsilon'_1} = \frac{\delta/2}{\varepsilon'_1} \quad \text{d'où} \quad -D_T \varepsilon'_1 = \delta(f'_T + \varepsilon'_1) \quad \text{soit} \quad \varepsilon'_1 = -\frac{\delta f'_T}{D_T + \delta}.$$

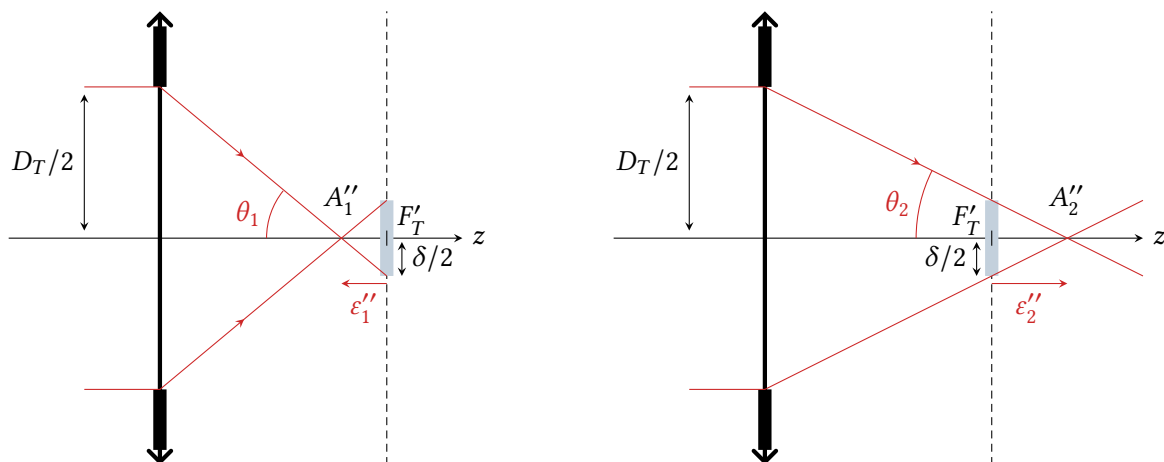


Figure 2 – Construction de la profondeur de champ.

8 En raisonnant avec les notations de la figure 2 à droite, et puisque $\varepsilon_2'' < 0$

$$\tan \theta_2 = -\frac{D_T/2}{f_T' + \varepsilon_2''} = -\frac{\delta/2}{\varepsilon_2''} \quad \text{d'où} \quad D_T \varepsilon_2'' = \delta(f_T' + \varepsilon_2'') \quad \text{soit} \quad \boxed{\varepsilon_2'' = \frac{\delta f_T'}{D_T - \delta} .}$$

9 La relation de conjugaison du microscope permet de déterminer les coordonnées ε_1 et ε_2 des antécédents de A_1'' et A_2'' par le microscope, puis d'en déduire la profondeur de champ,

$$\begin{aligned} \Delta z_g &= \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \\ &= \left(\frac{f_O'}{f_T'} \right)^2 \left(\frac{\delta f_T'}{D_T - \delta} + \frac{\delta f_T'}{D_T + \delta} \right) \\ &= \left(\frac{f_O'}{f_T'} \right)^2 \delta f_T' \times \frac{D_T + \delta + D_T - \delta}{(D_T + \delta)(D_T - \delta)} \\ &= \boxed{\Delta z_g = \frac{f_O'^2}{f_T'} \frac{2D_T \delta}{D_T^2 - \delta^2} = 0,33 \mu\text{m}} \end{aligned}$$

La profondeur de champ est très faible, ce qui permet au microscope d'obtenir une vue en coupe de l'échantillon, conformément à ce que l'on souhaite pour un microscope.

Bien que non demandé par l'énoncé, le résultat final peut se simplifier : puisque $D_T \gg \delta$,

$$\Delta z_g = \frac{f_O'^2}{f_T'} \frac{2\delta}{D_T} .$$

Il n'y a évidemment aucune différence sur l'application numérique à deux chiffres significatifs.