




Mécanique des fluides

Statique des fluides

Exercice 1 : Oscillations d'un ballon gonflé à l'hélium

oral banque PT | 💡 2 | ✂ 3 | Ⓜ

-  \triangleright Modèle de l'atmosphère isotherme ;
 \triangleright Poussée d'Archimède ;
 \triangleright Lien entre mécanique des fluides et des solides.

1 L'air est constitué à 20 % de dioxygène O_2 et 80 % de diazote N_2 , d'où

$$M_{\text{air}} = 0,2 \times 2M_O + 0,8 \times 2M_N = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}.$$

2 L'air étant un gaz parfait de température uniforme, sa masse volumique est reliée à la pression par

$$\rho_{\text{air}}(z) = \frac{M_{\text{air}}}{RT_0} P(z).$$

La relation de la statique des fluides donne alors

$$\frac{dP}{dz} = -\rho_{\text{air}}(z)g = -\frac{M_{\text{air}}g}{RT_0} P(z) \quad \text{soit} \quad \frac{dP}{dz} + \underbrace{\frac{M_{\text{air}}g}{RT_0}}_{=1/H} P = 0.$$

La pression au niveau du sol valant P_0 , cette équation se résout en

$$P(z) = P_0 e^{-z/H} \quad \text{avec} \quad H = \frac{RT_0}{M_{\text{air}}g} = 8,6 \text{ km}.$$

3 Puisque la masse de l'enveloppe est négligée, le ballon est soumis au poids \vec{P} de l'hélium et à la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$. D'après l'équation d'état des gaz parfaits, la masse d'hélium dans le ballon s'écrit

$$m = \frac{2P_0 V_0}{RT_0} M_{\text{He}},$$

d'où on déduit le poids

$$\vec{P} = -\frac{2P_0 V_0}{RT_0} M_{\text{He}} g \vec{e}_z.$$

La poussée d'Archimède est donnée par

$$\vec{\Pi} = \rho_{\text{air}}(z) V_0 g \vec{e}_z = \frac{M_{\text{air}}}{RT_0} P(z) V_0 g \vec{e}_z = \frac{M_{\text{air}}}{RT_0} P_0 e^{-z/H} V_0 g \vec{e}_z$$

Ainsi, à l'altitude d'équilibre, $\vec{P} + \vec{\Pi} = \vec{0}$, soit

$$-\frac{2P_0 V_0}{RT_0} M_{\text{He}} g + \frac{M_{\text{air}}}{RT_0} P_0 e^{-z_{\text{eq}}/H} V_0 g = 0 \quad \text{soit} \quad -2M_{\text{He}} + e^{-z_{\text{eq}}/H} M_{\text{air}} = 0$$

et ainsi

$$e^{-z_{\text{eq}}/H} = \frac{2M_{\text{He}}}{M_{\text{air}}} \quad \text{d'où} \quad z_{\text{eq}} = H \ln \frac{M_{\text{air}}}{2M_{\text{He}}} = 17 \text{ km}.$$

4 Lorsque le ballon s'élève, il atteint son altitude d'équilibre avec une vitesse non nulle, il la dépasse donc. La pression et la masse volumique de l'air continuant de diminuer, la poussée d'Archimède diminue également et le ballon redescend sous l'effet de son poids ... et repasse par sa position d'équilibre avec une vitesse non nulle. Une fois redescendu, la masse volumique augmente à nouveau, devient supérieure au poids, et le ballon remonte. Le même mécanisme se reproduit alors à l'identique, ce qui fait osciller le ballon.

D'après le théorème de la résultante cinétique appliqué au ballon, en projection sur l'axe (Oz) ,

$$\frac{2P_0 V_0}{RT_0} M_{\text{He}} \frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{2P_0 V_0}{RT_0} M_{\text{He}} g + \frac{M_{\text{air}}}{RT_0} P_0 e^{-z/H} V_0 g \quad \text{soit} \quad 2M_{\text{He}} \frac{d^2 z}{dt^2} = -2M_{\text{He}} g + M_{\text{air}} g e^{-z/H}.$$

On se place au voisinage de la position d'équilibre, en posant $z = z_{\text{éq}} + \varepsilon$ avec $\varepsilon \ll z_{\text{éq}}, H$. L'équation différentielle sur ε s'écrit

$$\begin{aligned} 2M_{\text{He}} \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} &= -2M_{\text{He}} g + M_{\text{air}} g e^{-(z_{\text{éq}} + \varepsilon)/H} \\ &= -2M_{\text{He}} g + M_{\text{air}} g e^{-z_{\text{éq}}/H} e^{-\varepsilon/H} \\ &\simeq 2M_{\text{He}} g + M_{\text{air}} g e^{-z_{\text{éq}}/H} \left(1 - \frac{\varepsilon}{H}\right) \end{aligned}$$

En réorganisant les termes,

$$2M_{\text{He}} \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + M_{\text{air}} g e^{-z_{\text{éq}}/H} \frac{\varepsilon}{H} = -2M_{\text{He}} g + M_{\text{air}} g e^{-z_{\text{éq}}/H}$$

ce qui se réécrit

$$\frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + \frac{M_{\text{air}} g e^{-z_{\text{éq}}/H}}{2M_{\text{He}} H} \varepsilon = g \left(-1 + \frac{M_{\text{air}}}{2M_{\text{He}}} e^{-z_{\text{éq}}/H} \right)$$

Or d'après la question précédente

$$e^{-z_{\text{éq}}/H} M_{\text{air}} = 2M_{\text{He}},$$

ce qui permet de simplifier en

$$\frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + \frac{g}{H} \varepsilon = 0.$$

On reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation

$$\omega_0^2 = \frac{g}{H}.$$

d'où on déduit la période des petites oscillations

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{H}{g}}.$$

Exercice 2 : Atmosphère adiabatique et polytropique

💡 3 | ✂ 3



- ▷ Relation de la statique des fluides dans un gaz;
- ▷ Loi de Laplace.

1 Par définition de δ , le profil de température s'écrit

$$T(z) = T_0 + \delta z.$$

Avec l'équation de la statique des fluides,

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g = -\frac{Mg}{RT(z)} P(z).$$

En séparant les variables,

$$\int_{P_0}^{P(z)} \frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{R\delta} \int_0^z \frac{\delta dz}{T_0 + \delta z}$$

soit

$$\ln \frac{P(z)}{P_0} = -\frac{Mg}{R\delta} \ln \frac{T_0 + \delta z}{T_0} = \ln \left(1 + \frac{\delta z}{T_0} \right)^{-Mg/R\delta}$$

et finalement

$$P(z) = P_0 \left(1 + \frac{\delta z}{T_0}\right)^{-Mg/R\delta}.$$

2 On lit $T_0 = 15^\circ\text{C}$ et $T(12\text{ km}) = -55^\circ\text{C}$ soit

$$\delta_{\text{réel}} = -6 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{m}^{-1}.$$

3 Si les transformations sont adiabatiques réversibles, alors d'après la loi de Laplace

$$T^\gamma P^{1-\gamma} = \text{cte.}$$

4 Le logarithme de la loi de Laplace donne

$$\gamma \ln T + (1 - \gamma) \ln P = \ln(\text{cte})$$

donc en différenciant

$$\gamma \frac{dT}{T} + (1 - \gamma) \frac{dP}{P} = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{dP}{P} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{dT}{T}.$$

L'astuce qui consiste à passer par le logarithme puis à différencier sert dans beaucoup de contextes différents, et la retenir peut être utile.

5 D'après la relation de la statique des fluides,

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \quad \text{soit} \quad dP = -\rho g dz = -\frac{M_{\text{air}}P}{RT} g dz$$

d'après l'équation d'état. On en déduit par identification avec la question précédente

$$\frac{dP}{P} = -\frac{M_{\text{air}}}{RT} g dz = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{dT}{T}$$

ce qui permet de conclure

$$\delta_{\text{ad}} = \frac{M_{\text{air}}g(1 - \gamma)}{R\gamma} = -10 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{m}^{-1}.$$

Le modèle adiabatique est évidemment meilleur que celui de l'atmosphère isotherme, car il prévoit un gradient de température non nul, indépendant de z , et du bon ordre de grandeur, mais l'accord des valeurs numériques est perfectible ... heureusement, la suite de l'exercice est là ☺

6 En réutilisant l'expression de la masse volumique, la relation donnée s'écrit


$$T^q P^{1-q} = \text{cte.}$$

Ainsi, formellement, l'exposant polytropique q joue le rôle de γ dans les calculs, donc

$$\delta_{\text{poly}} = \frac{Mg(1 - q)}{Rq} \quad \text{d'où} \quad q = \frac{Mg}{Mg + R \delta_{\text{réel}}} \simeq 1,2.$$

Exercice 3 : Force de pression sur un tube à essais

oral banque PT | 💡 2 | ✂️ 2 | Ⓜ️

- 
 ▷ Relation de l'hydrostatique ;
 ▷ Résultante des forces de pression ;
 ▷ Intégration par découpage mésoscopique.

1 Comme l'axe (Oz) est orienté vers le bas, la relation de la statique des fluides s'écrit

$$\frac{dP}{dz} = +\rho g$$

donc en intégrant par séparation de variables

$$\int_{P_0}^{P(z)} dP = \rho g \int_{-H}^z dz \quad \text{d'où} \quad \boxed{P(z) = P_0 + \rho g(z + H)}.$$

2 La force de pression subie par une surface élémentaire du tube centrée sur un point M est dirigée selon la normale sortante au tube et ne dépend que de la profondeur z du point M . On raisonne sur la figure 1.

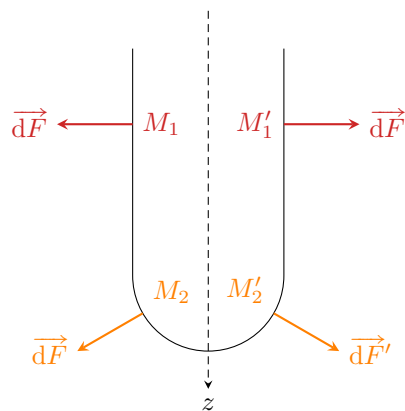


Figure 1 – Direction des forces de pression au sein du tube à essais.

- **Portion cylindrique** : raisonnons temporairement en coordonnées **cylindriques**. La force de pression est en tout point M dirigée par \vec{e}_r . Ainsi, pour deux points M_1 et M'_1 situés à la surface du tube à une même profondeur z mais à deux angles θ et $\theta' = \theta + \pi$, la force a même norme mais sens opposé. Ce raisonnement étant valable pour chaque point de la surface du tube, on en déduit que la résultante des forces de pression sur la portion cylindrique est nulle.

- **Portion hémisphérique** : raisonnons maintenant en coordonnées **sphériques**, ce qui change la définition de l'angle θ . La force de pression est en tout point M encore une fois dirigée par \vec{e}_r ... mais comme le système de coordonnées n'est plus le même, ce n'est plus le même vecteur. Ainsi, pour deux points M_2 et M'_2 situés à la surface du tube à une même profondeur z mais à deux angles φ et $\varphi' = \varphi + \pi$, il y a une compensation des composantes horizontales, alors que les composantes verticales (selon \vec{e}_z) s'ajoutent. Ce raisonnement étant valable pour chaque point de la surface du tube, on en déduit que la résultante des forces de pression sur la portion hémisphérique est dirigée selon \vec{e}_z .

- **Conclusion** : la résultante des forces de pression subie par le tube est dirigée selon \vec{e}_z .

3 Il est suffisant de s'intéresser au fond du tube en raisonnant en coordonnées sphériques. Une élément de surface dS de normale \vec{e}_r subit la force pressante exercée par l'eau, de pression $P(z)$, et la force pressante exercée par l'air, de pression uniforme P_0 et de sens opposé à la précédente. Ainsi,

$$d\vec{F} = (P(z) - P_0) dS \vec{e}_r$$

d'où on déduit

$$\begin{aligned}
 dF_z &= (P(z) - P_0) dS \vec{e}_r \cdot \vec{e}_z \\
 &= \rho g(H + z) \cos \theta dS \\
 &= \rho g(H + R \cos \theta) \cos \theta dS
 \end{aligned} \tag{1}$$

- **Première méthode** : expression de la surface élémentaire en coordonnées sphériques.

Le vecteur déplacement élémentaire a pour expression en coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{dM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{e}_\varphi$$

et comme la surface élémentaire considérée est de normale \vec{e}_r et de rayon $r = R$ alors sa surface est

$$dS = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi.$$

La surface dS intervenant dans l'équation (1) est quelconque, on peut donc réutiliser directement l'expression de dF_z pour sommer :

$$\begin{aligned} F_z &= \iint \rho g (H + R \cos \theta) \cos \theta dS \\ &= \iint \rho g (H + R \cos \theta) \cos \theta R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= R^2 \rho g \times \int_0^{\pi/2} (H + R \cos \theta) \cos \theta \sin \theta d\theta \times \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= 2\pi R^2 \rho g \int_0^{\pi/2} (H + R \cos \theta) \cos \theta \sin \theta d\theta \\ &= 2\pi R^2 H \rho g \times \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) + 2\pi R^3 \rho g \left(-\frac{0^3}{3} + \frac{1^3}{3} \right) \\ &= \pi R^2 H \rho g + \frac{2\pi}{3} R^3 \rho g \\ F_z &= \pi R^2 \rho g \left(H + \frac{2}{3} R \right) \end{aligned}$$

ce qui conduit en fin de compte à

$$\boxed{\vec{F} = \pi R^2 \rho g \left(H + \frac{2}{3} R \right) \vec{e}_z.}$$

On constate que la force subie par le tube est la même que s'il avait un fond plat sous une hauteur d'eau $H + 2R/3$.

• **Deuxième méthode : découpage mésoscopique.**

La force dF_z est uniforme en tout point d'une couronne sphérique comprise entre les angles θ et $\theta + d\theta$. La résultante sur cette couronne, dont la surface dS_c est donnée, vaut donc

$$dF_{z,c} = \rho g (H + R \cos \theta) \cos \theta dS_c = \rho g (H + R \cos \theta) \cos \theta \times 2\pi R^2 \sin \theta d\theta$$

En sommant ces forces pour chacune des couronnes élémentaires, θ allant de 0 à $\pi/2$, on en déduit

$$\begin{aligned} F_z &= 2\pi R^2 \rho g \int_0^{\pi/2} (H + R \cos \theta) \cos \theta \sin \theta d\theta \\ &= 2\pi R^2 H \rho g \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta + 2\pi R^3 \rho g \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \end{aligned}$$

ce qui nous ramène exactement au cas précédent.

Exercice 4 : Plaque pivotante

oral banque PT | 💡 3 | ✂️ 2



- ▷ Lien entre mécanique des fluides et des solides.
- ▷ Résultante des forces de pression.
- ▷ Moment cinétique.

1 La pression est donnée par la loi de l'hydrostatique. Comme l'axe (Oy) est ascendant, elle s'écrit

$$\frac{dP}{dy} = -\rho g \quad \text{soit} \quad \int_{P_0}^{P(y)} dP = -\rho g \int_h^y dy$$

si bien que

$$P(y) = P_0 - \rho g(y - h) = P_0 + \rho g(h - y).$$

2 La pression dans l'eau sur la plaque horizontale est uniforme et vaut

$$P_h = P(y=0) = P_0 + \rho gh.$$

Elle vaut simplement P_0 côté air. La résultante des forces de pression s'en déduit directement

$$\vec{F}_h = -P_h ab \vec{e}_y + P_0 ab \vec{e}_y \quad \text{soit} \quad \vec{F}_h = -\rho gh ab \vec{e}_y.$$

Pour calculer le moment, décomposons la plaque horizontale en bandes mésoscopiques de largeur dx et de longueur b dans la direction z . La force pressante sur chacune de ces bandes vaut

$$d\vec{F}_h = -\rho gh b dx \vec{e}_y$$

et son bras de levier autour de l'axe (Oz) est simplement égal à l'abscisse x de la bande. Sachant que la force $d\vec{F}_h$ tend à faire tourner la plaque en sens négatif autour de l'axe (Oz), on en déduit le moment élémentaire

$$d\mathcal{M}_h = -x \times \rho gh b dx.$$

Le moment résultant s'obtient par sommation,

$$\mathcal{M}_h = \int_0^a -x \rho gh b dx = -\rho gh b \int_0^a x dx = -\rho gh b \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^a$$

et ainsi

$$\mathcal{M}_h = -\rho gh \frac{ba^2}{2}.$$

De manière alternative, on peut calculer ce moment en constatant que la pression est uniforme sur la plaque, d'où on déduit par symétrie que la force \vec{F}_h est appliquée au centre de la plaque. Ce faisant, son bras de levier est égal à $a/2$, ce qui conduit au résultat.

3 La pression sur la plaque verticale est toujours uniformément égale à P_0 côté air, mais elle n'est plus uniforme côté eau. Un élément de surface dS de la plaque verticale situé à l'ordonnée y subit donc

$$-[P_0 + \rho g(h - y)] dy dz \vec{e}_x + P_0 dy dz \vec{e}_x = \rho g(y - h) dy dz \vec{e}_x,$$

donc par intégration

$$\vec{F}_v = \iint \rho g(y - h) dy dz \vec{e}_x = \rho gb \left[\frac{y^2}{2} - hy \right]_0^h \vec{e}_x = \rho gb \left(\frac{h^2}{2} - h^2 \right) \vec{e}_x$$

soit

$$\vec{F}_v = -\rho gb \frac{h^2}{2} \vec{e}_x.$$

On peut de nouveau raisonner sur une bande mésoscopique : une bande horizontale de la plaque

verticale comprise entre y et $y + dy$ subit une force pressante égale à

$$d\vec{F}_v = -[P_0 + \rho g(h - y)] b dy \vec{e}_x + P_0 b dy \vec{e}_x = \rho g(y - h) b dy \vec{e}_x.$$

Il n'y a bien sûr dans ce cas que l'intégrale sur y à calculer.

Le bras de levier de la force élémentaire $d\vec{F}_v$ par rapport à l'axe (Oz) est égal à y , et comme cette force tend à faire tourner la plaque dans le sens trigonométrique alors son moment vaut

$$d\mathcal{M}_v = +y \times \rho g(h - y) dx dy.$$

Attention aux signes : dans le calcul du moment avec le bras de levier, c'est la norme de la force qui intervient, et ici $h > y$.

Le moment résultant vaut

$$\mathcal{M}_v = \iint y \rho g(h - y) dy dz = \rho g b \int_0^h y(h - y) dy = \rho g b \left[\frac{hy^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_0^h = \rho g b \left(\frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{3} \right)$$

ce qui donne finalement

$$\mathcal{M}_v = \rho g b \frac{h^3}{6}.$$

4 Outre les deux forces pressantes, les deux parois sont également soumises à une force de liaison $\vec{N} = N \vec{e}_y$ au point d'appui sur le bâti, donc de moment $+aN$ par rapport à l'axe (Oz). La condition d'équilibre en termes de moment cinétique s'écrit

$$\mathcal{M}_h + \mathcal{M}_v + aN = 0.$$

Le système reste en contact avec le bâti tant que $N > 0$, donc tant que $\mathcal{M}_h + \mathcal{M}_v < 0$. Ainsi, il y a basculement de la plaque dès lors que le moment total des forces de pression autour de (Oz) s'annule, c'est-à-dire

$$-\rho g h \frac{ba^2}{2} + \rho g b \frac{h^3}{6} = 0 \quad \text{soit} \quad -\frac{a^2}{2} + \frac{h^2}{6} = 0.$$

La hauteur limite de basculement est donc

$$h_0 = a\sqrt{3}.$$

Écoulements, débits

Exercice 5 : Double écoulement de Couette

oral banque PT | 💡 1 | ✂ 2 | Ⓜ



- ▷ Profil de vitesse ;
- ▷ Force de viscosité.

1 Le fluide étant visqueux, sa vitesse est égale à celle des solides au niveau des surfaces de contact. Ainsi, dans la zone ①,

▷ en $y = 0$:

$$v(y=0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CL}}}{=} 0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{expr}}}{=} B_1 \quad \text{d'où} \quad B_1 = 0$$

▷ en $y = y_0$:

$$v(y=y_0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CL}}}{=} V_0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{expr}}}{=} A_1 y_0 + \cancel{B_1} \quad \text{d'où} \quad A_1 = \frac{V_0}{y_0}$$

De même, dans la zone ②,

▷ en $y = h$:

$$v(y=h) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CL}}}{=} 0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{expr}}}{=} A_2 h + B_2 \quad \text{d'où} \quad B_2 = -A_2 h$$

▷ en $y = y_0 + e$:

$$v(y=y_0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CL}}}{=} V_0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{expr}}}{=} A_2 (y_0 + e) + B_2 = A_2 (y_0 + e - h) \quad \text{d'où} \quad A_2 = \frac{V_0}{y_0 + e - h}$$

En fin de compte,

$$\vec{v}_1(y) = V_0 \frac{y}{y_0} \vec{e}_x \quad \text{et} \quad \vec{v}_2(y) = V_0 \frac{y-h}{y_0+e-h} \vec{e}_x.$$

2 Voir figure 2.

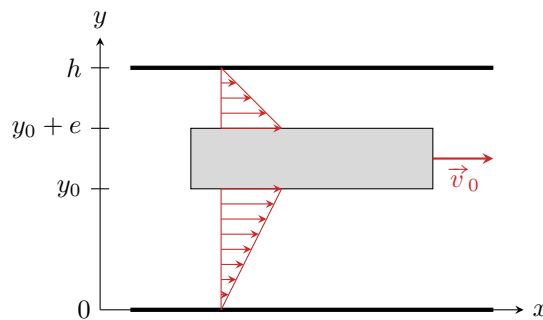


Figure 2 – Champ de vitesse de part et d'autre de la plaque.

3 Ici, le fluide tend à freiner la plaque : la force $\vec{d}f$ est donc portée par $-\vec{u}_x$. Sur la partie inférieure de la plaque, en $y = y_0$,

$$\vec{d}f_1 = -\eta \left| \frac{dv_1}{dy}(y=y_0) \right| dS \vec{u}_x,$$

et sur la partie supérieure, en $y = y_0 + e$,

$$\vec{d}f_2 = -\eta \left| \frac{dv_2}{dy}(y=y_0 + e) \right| dS \vec{u}_x.$$

4 La force de frottement \vec{f} est la résultante des forces $\vec{d}f_1$ et $\vec{d}f_2$ sur les deux surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Sur la face inférieure,

$$\vec{f}_1 = \iint \vec{d}f_1 = -\eta \frac{V_0}{y_0} S \vec{u}_x,$$

et sur la face supérieure,

$$\vec{f}_2 = \iint \vec{d}f_2 = -\eta \frac{V_0}{y_0 + e - h} S \vec{u}_x,$$

Ainsi, au total,

$$\vec{f} = -\eta V_0 \left(\frac{1}{y_0} + \frac{1}{y_0 + e - h} \right) S \vec{u}_x.$$

La plaque étant en mouvement rectiligne uniforme, les forces qu'elle subit se compensent, donc

$$\vec{F}_0 = -\vec{f} = \eta V_0 \left(\frac{1}{y_0} + \frac{1}{y_0 + e - h} \right) S \vec{u}_x.$$

Exercice 6 : Déplacement d'un piston à huile

oral banque PT | 💡 3 | ✂ 2

- Débit volumique ;
- Force de viscosité ;
- Lien entre mécanique des fluides et des solides.

1 L'estimation la plus simple est

$$GP = \frac{P_2 - P_1}{h} = \frac{P_1}{h}.$$

2 La section au travers laquelle s'écoule le fluide est une couronne circulaire (un anneau) compris entre les rayons R_1 et R_2 . Elle a pour surface $S = \pi R_2^2 - \pi R_1^2$. Le débit volumique vaut donc

$$D_V = v_d S = \pi \alpha \frac{P_1}{h} (R_2^2 - R_1^2).$$

3 Raisonnons en coordonnées cylindriques. La force surfacique de viscosité subie par le cylindre intérieur a pour norme

$$F_{\text{surf}} = \eta \left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{r=R_1}.$$

Compte tenu des données à disposition, on peut approximer que l'ordre de grandeur de la vitesse dans l'interstice est v_d et que cette vitesse change sur une distance $R_2 - R_1$. Ainsi, en ordre de grandeur,

$$\left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{r=R_1} \simeq \frac{v_d}{R_2 - R_1} = \frac{\alpha P_1}{\eta h (R_2 - R_1)} \quad \text{soit} \quad F_{\text{surf}} \simeq \frac{\alpha P_1}{h (R_2 - R_1)}.$$

En supposant que cette force surfacique est la même sur tout le cylindre, il vient

$$F_{\text{visq}} = 2\pi R_1 h \times F_{\text{surf}} \quad \text{d'où} \quad \boxed{F_{\text{visq}} = \frac{2\pi R_1 \alpha P_1}{R_2 - R_1}}.$$

4 Notons \vec{u} le vecteur unitaire orienté de la gauche vers la droite de la figure. Le piston est soumis

▷ à la force $\vec{F} = F\vec{u}$ exercée par l'opérateur ;

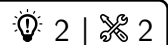
▷ à la force visqueuse $\vec{F}_{\text{visq}} = -F_{\text{visq}}\vec{u}$, orientée vers la gauche car le piston se déplace vers la droite ;

▷ à la force pressante $\vec{F}_p = (P_1 - P_2)\pi R_1^2 \vec{u} = -P_1\pi R_1^2 \vec{u}$.

Comme le mouvement du piston est qualifié de quasi-statique, on peut considérer que ces forces se compensent, d'où

$$F - \frac{2\pi R_1 \alpha P_1}{R_2 - R_1} - P_1\pi R_1^2 = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{F = \frac{2\pi R_1 \alpha P_1}{R_2 - R_1} + P_1\pi R_1^2}.$$

Exercice 7 : Résistance hydraulique d'une conduite



▷ Débit volumique.

1 Comme toujours avec ce genre d'équation, on ne développe surtout pas la dérivée mais on procède par intégrations successives. On réécrit et on procède à la première intégration,

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = -\frac{\Delta P}{\eta L} r \quad \text{d'où} \quad r \frac{dv}{dr} = -\frac{\Delta P}{\eta L} \frac{r^2}{2} + A$$

où A est une constante. De même,

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{\Delta P}{\eta L} \frac{r}{2} + \frac{A}{r} \quad \text{d'où} \quad v(r) = -\frac{\Delta P}{\eta L} \frac{r^2}{4} + A \ln r + B$$

avec B une constante également. Or il est clair que la vitesse ne diverge pas au centre de la conduite, donc $A = 0$. Le fluide étant visqueux, sa vitesse est nulle au contact d'une paroi fixe, donc

$$v(r=R) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CL}}}{=} 0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sol}}}{=} -\frac{\Delta P}{4\eta L} R^2 + B$$

d'où on déduit

$$\boxed{v(r) = \frac{\Delta P}{4\eta L} (R^2 - r^2)}.$$

Le profil de vitesse est parabolique, maximal au centre de la conduite et nul sur les parois.

2 On considère une section \mathcal{S} de normale \vec{e}_z . L'élément de surface en coordonnées cylindriques s'écrit $dS = dr \times r d\theta$.

Le débit volumique s'écrit donc

$$\begin{aligned}
 D_v &= \iint_S \frac{\Delta P}{4\eta L} (R^2 - r^2) r \, dr \, d\theta \\
 &= \frac{\Delta P}{4\eta L} \times \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^R (R^2 - r^2) r \, dr \\
 &= \frac{\Delta P}{4\eta L} \times 2\pi \times \left[\frac{R^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^R \\
 &= \frac{\pi \Delta P}{2\eta L} \times R^4 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right)
 \end{aligned}$$

$$D_v = \frac{\pi R^4}{8\eta L} \Delta P.$$

3 Par analogie avec une résistance électrique, ΔP est l'analogie de $U = \Delta V$ et le débit volumique est l'analogie de l'intensité, qui n'est autre qu'un débit de charge. La différence de pression entraîne l'apparition d'un débit volumique, de même qu'une tension appliquée à une résistance entraîne l'apparition d'un courant. On peut également faire l'analogie avec la résistance thermique : une différence de température entraîne l'apparition d'un flux thermique.

Tous ces phénomènes qui se décrivent avec un formalisme voisin sont appelés « phénomènes de transport ». Ils recouvrent entre autres le transport de charges électriques, le transport de masse par un fluide, la diffusion thermique, ou encore la diffusion de matière (pas au programme de PT).

À partir de l'expression précédente, il vient directement

$$R_H = \frac{8\eta L}{\pi R^4}.$$

4 La résistance hydraulique de la conduite de section $2S$ s'obtient directement à partir de l'expression précédente, et vaut

$$R_H = \frac{8\eta L}{\pi (2S)^2} = \frac{2\eta L}{\pi S^2}.$$

Si les conduites sont placées en parallèle, alors la résistance hydraulique équivalente s'obtient par somme des inverses (les débits s'ajoutent mais ΔP est le même pour les deux conduites), ainsi

$$\frac{1}{R'_H} = \frac{\pi S^2}{8\eta L} + \frac{\pi S^2}{8\eta L} = \frac{\pi S^2}{4\eta L} \quad \text{d'où} \quad R'_H = \frac{4\eta L}{\pi S^2}.$$

Par définition de la résistance hydraulique, comme le débit volumique est le même dans les deux installations,

$$D_v = \frac{\Delta P}{R_H} = \frac{\Delta P'}{R'_H} \quad \text{soit} \quad \frac{\Delta P'}{\Delta P} = \frac{R'_H}{R_H} = 2.$$


Par conséquent, utiliser **une seule conduite de grande section** permet d'obtenir le même débit pour une surpression imposée plus faible.

Qualitativement, cela s'explique par les forces visqueuses au niveau des parois : la surface des parois est plus faible dans la conduite de grande section, ce qui diminue d'autant les pertes énergétiques.

Théorème de Bernoulli

Exercice 8 : Stockage d'énergie par pompage

oral banque PT | 💡 2 | ✂️ 1 | ⚙️

- 
 ▷ Pertes de charge;
 ▷ Puissance indiquée.

1 La vitesse débitante dans le tuyau vaut

$$v = \frac{D_v}{\pi a^2} = 3,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Appliquons la relation de Bernoulli entre les points A et B , supposés sur trouver à la surface libre du bassin bas et celle du bassin haut. Ainsi, $P_A = P_B = P_{\text{atm}}$ et $v_A \simeq v_B \simeq 0$, d'où

$$D_m \left[\left(\frac{P_B}{\rho} + \frac{v_B^2}{2} + gz_B \right) - \left(\frac{P_A}{\rho} + \frac{v_A^2}{2} + gz_A \right) \right] = \mathcal{P}$$

ce qui donne

$$\mathcal{P} = \rho D_v g(z_B - z_A) = 1,30 \cdot 10^9 \text{ W} = 1300 \text{ MW}.$$

2 Les pertes de charge quantifient la **perte d'énergie mécanique par viscosité** au sein de la conduite, c'est-à-dire schématiquement par frottement. On constate sur l'expression donnée que la perte de charge est proportionnelle à la longueur de la conduite (perte de charge régulière), et inversement proportionnelle à son diamètre, ce qui semble raisonnable étant donné qu'il y a adhérence sur la paroi de la conduite. Par ailleurs, le terme $\rho v^2/2$ représente l'énergie cinétique volumique du fluide, et il semble là aussi raisonnable que la perte visqueuse soit d'autant plus grande que le fluide a d'énergie cinétique. Dimensionnellement, la relation de Bernoulli permet de constater que le produit ρv^2 est homogène à une pression, ce qui indique directement que λ est sans dimension.

3 On reprend la relation de Bernoulli, incluant les pertes de charge, ce qui donne

$$D_m \left[\left(\frac{P_B}{\rho} + \frac{v_B^2}{2} + gz_B \right) - \left(\frac{P_A}{\rho} + \frac{v_A^2}{2} + gz_A \right) \right] = \mathcal{P}' - D_m \frac{\Delta P}{\rho}$$

et ainsi

$$\mathcal{P}' = D_v (\rho g(z_B - z_A) + \Delta P).$$

Numériquement,

$$\Delta P = 1,32 \text{ bar}$$


d'où on trouve

$$\mathcal{P}' = 1,32 \cdot 10^9 \text{ W}.$$

On constate que les pertes de charge sont proportionnellement très faibles, compte tenu de la grande hauteur à remonter, et que les valeurs obtenues par le calcul sont tout à fait cohérentes avec les valeurs réelles.

Exercice 9 : Vase de Mariotte

oral banque PT | 💡 3 | ✂️ 2

- 
 ▷ Écoulement parfait;
 ▷ Conservation de la masse;
 ▷ Intégration par séparation de variables.

1 Entre deux points A et B situés sur une même ligne de courant d'un écoulement parfait, stationnaire et incompressible, il y a conservation de la charge hydraulique

$$\frac{P_A}{\rho} + \frac{v_A^2}{2} + gz_A = \frac{P_B}{\rho} + \frac{v_B^2}{2} + gz_B.$$

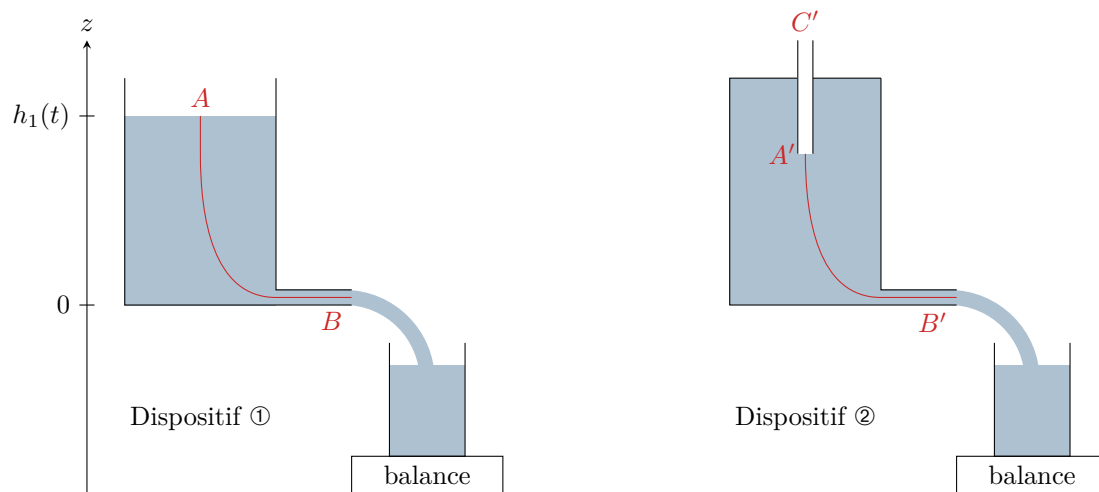


Figure 3 – Lignes de courant et notations utiles.

2 Notons $h_1(t)$ la hauteur d'eau à l'instant t dans le réservoir. Raisonons sur la ligne de courant AB de la figure 3. D'après la relation de Bernoulli,

$$\frac{P_0}{\rho} + \frac{v_A^2}{2} + gh_1 = \frac{P_0}{\rho} + \frac{v_B^2}{2} + 0.$$

L'écoulement étant incompressible,

$$v_A S = v_B s \quad \text{soit} \quad v_A = \frac{s}{S} v_B \ll 1$$

ce qui permet de simplifier la relation précédente et d'obtenir

$$v_B = \sqrt{2gh_1},$$

ce qui donne un débit

$$D_1 = s\sqrt{2gh_1}.$$

En réutilisant la conservation du débit volumique entre les points A et B ,

$$v_A S = v_B s \quad \text{soit} \quad \left| \frac{dh_1}{dt} \right| S = s\sqrt{2gh_1} \quad \text{d'où} \quad -\frac{dh_1}{dt} S = s\sqrt{2gh_1}$$

puisque la hauteur d'eau h_1 décroît, donc sa dérivée est négative.

Une autre façon de procéder peut être d'exprimer de deux façons différentes le volume élémentaire δV sortant de la conduite pendant une durée dt . D'une part, ce volume est relié au débit volumique par

$$\delta V = D_1 dt = s\sqrt{2gh_1} dt,$$

et d'autre part il est relié à la variation de hauteur dans le réservoir par

$$\delta V = S h_1(t) - S h_1(t + dt) = S \frac{dh_1}{dt} dt,$$

ce qui conduit heureusement au même résultat.

Cette équation se résout par séparation des variables :

$$\begin{aligned}\frac{dh_1}{\sqrt{2gh_1}} &= -\frac{s}{S} dt \\ 2 \times \frac{1}{2g} \int_H^{h_1(t)} \frac{2g dh_1}{2\sqrt{2gh_1}} &= -\frac{s}{S} \int_0^t dt \\ \frac{1}{g} \left[\sqrt{2gh_1} \right]_H^{h_1(t)} &= -\frac{s}{S} t \\ \sqrt{2gh_1} - \sqrt{2gH} &= -\frac{s}{S} gt \\ \sqrt{h_1} &= \sqrt{H} - \frac{s}{S} \sqrt{\frac{g}{2}} t \\ h_1(t) &= H - \frac{s}{S} \sqrt{2gH} t + \frac{s^2}{S^2} \frac{g}{2} t^2\end{aligned}$$

ce qui permet d'en déduire la masse contenue dans le béccher,

$$m_1 = \rho S(H - h_1) \quad \text{soit} \quad m_1(t) = \rho S \times \left(\frac{s}{S} \sqrt{2gH} t - \frac{s^2}{S^2} \frac{g}{2} t^2 \right)$$

et enfin

$$m_1(t) = \rho s \sqrt{2gH} t - \frac{\rho s^2}{S} \frac{g}{2} t^2.$$

3 Qualitativement, de l'air peut toujours pénétrer dans le haut du réservoir si bien que l'eau continue à s'écouler en étant remplacée par l'air qui entre par le tuyau. D'après la relation de Bernoulli appliquée entre le haut (point C') et le bas de l'arrivée d'air (point A'), sachant que la conservation du débit d'air impose $v_{A'} = v_{C'}$:

$$\frac{P_{\text{atm}}}{\rho_{\text{air}}} + gz_{C'} = \frac{P_{A'}}{\rho_{\text{air}}} + gz_{A'} \quad \text{soit} \quad P_{A'} = P_{\text{atm}} + \rho_{\text{air}} g(z_{C'} - z_{A'}).$$

Sachant que $\rho_{\text{air}} \sim 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, pour $z_{C'} - z_{A'} \sim 10 \text{ cm}$, on a $\rho_{\text{air}} g(z_{C'} - z_{A'}) \sim 1 \text{ Pa}$, ce qui est négligeable devant $P_{\text{atm}} = 10^5 \text{ Pa}$.

4 Notons $z_{A'} = h_0$. En appliquant la relation de Bernoulli sur la ligne de courant $A'B'$, et en la simplifiant comme à la question précédente, on obtient


$$D_2 = s\sqrt{2gh_0} = \text{cte} \quad \text{d'où} \quad \frac{dm_2}{dt} = \rho s \sqrt{2gh_0}$$

et une intégration qui est, cette fois-ci, immédiate donne

$$m_2(t) = \underbrace{\rho s \sqrt{2gh_0}}_{=a} t.$$

5 Lorsque le bas de l'arrivée d'air est émergée, la ligne de courant $A'B'$ n'existe plus et le raisonnement précédent n'est plus valide. La situation devient analogue au dispositif ①, où c'est la surface libre de l'eau qui est à la pression atmosphérique, et on retrouve une évolution de la masse contenue dans le béccher du même type que $m_1(t)$.

Exercice 10 : Cavitation dans une conduite forcée inspiré oral banque PT | 💡 2 | ✂️ 2 | Ⓞ

 ▷ Pertes de charge;
▷ Puissance indiquée.

1 La retenue d'eau est de surface très supérieure à celle de la conduite forcée, si bien que la vitesse de l'eau y est négligeable. Appliquons le théorème de Bernoulli entre la surface libre de la retenue et la sortie de la conduite, où la pression est égale à la pression atmosphérique P_0 :

$$\frac{P_0}{\rho} + \frac{0^2}{2} + gH = \frac{P_0}{\rho} + \frac{v^2}{2} + 0 \quad \text{d'où} \quad v = \sqrt{2gH}.$$

On retrouve sans surprise la relation de Torricelli, qui est valable quelle que soit la géométrie du système tant que le fluide part et arrive à pression atmosphérique et que les pertes de charges sont négligées.

2 Appliquons maintenant le théorème de Bernoulli entre une hauteur z dans la conduite et sa sortie. Comme l'injecteur est négligé, la conservation du débit volumique indique que la vitesse est identique aux deux points considérés.

$$\frac{P(z)}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = \frac{P_0}{\rho} + \frac{v^2}{2} + 0 \quad \text{d'où} \quad \boxed{P(z) = P_0 - \rho g z.}$$

Il y a cavitation s'il existe un domaine d'altitudes au sein de la conduite tel que $P(z) < P_{\text{sat}}$. L'entrée de la conduite étant le lieu le plus élevé, il y a de façon certaine cavitation si

$$P_0 - \rho g H_0 < P_{\text{sat}} \quad \text{soit} \quad \boxed{H_0 > \frac{P_0 - P_{\text{sat}}}{\rho g} = 10 \text{ m.}}$$

Comme la retenue d'eau se retrouve 95 m au dessus de la sortie de la conduite, **il y a très probablement cavitation**, ce qui nuit au bon fonctionnement de l'installation.

Bien sûr, tout dépend de la valeur de H_0 , mais il est très peu probable, pour ne pas dire impossible, que l'entrée de la conduite forcée se trouve plus de 85 m sous la surface libre!

Attention, la relation obtenue pour $P(z)$ est valable seulement au sein de la conduite, mais pas dans la retenue d'eau : en effet, il n'y a pas d'écoulement donc pas de simplification des vitesses. Dans la retenue, le profil de pression est hydrostatique : $P = P_0 - \rho g(z - H)$. On peut ainsi constater qu'il y a discontinuité de pression à l'entrée de la conduite, ce qui est logique compte tenu de la mise en écoulement.

3 Notons v' la vitesse en sortie de l'injecteur. Par conservation du débit volumique, entre l'entrée et la sortie de l'injecteur,

$$v \frac{\pi D^2}{4} = v' \frac{\pi d^2}{4} \quad \text{soit} \quad \frac{v}{v'} = \frac{d^2}{D^2}.$$

La relation de Bernoulli appliquée entre l'entrée et la sortie de l'injecteur, tous les deux situés à l'altitude $z = 0$, donne alors

$$\frac{P_e}{\rho} + \frac{v^2}{2} + 0 = \frac{P_s}{\rho} + \frac{v'^2}{2} + 0 \quad \text{soit} \quad P_e = P_s + \frac{1}{2}\rho(v'^2 - v^2)$$

On en déduit

$$P_e = P_s + \frac{1}{2}\rho v'^2 \left(1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right) > P_s$$

La pression en entrée de l'injecteur est inférieure à la pression en sortie. Le calcul de la question 2 est toujours valable, à condition de remplacer P_0 par P_e , ce qui donne

$$P(z) = P_e - \rho g z.$$

La vitesse de sortie vaut toujours $v' = \sqrt{2gH}$, donc

$$P(z) = P_0 + \rho g H \left(1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right) - \rho g z.$$

Comme précédemment, il y a cavitation si $P(z=H_0) < P_{\text{sat}}$, soit

$$H_0 > \frac{P_0 + \rho g H \left(1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right) - P_{\text{sat}}}{\rho g} = 105 \text{ m.}$$

La surface libre de la retenue se trouvant à une altitude de 95 m, l'inégalité précédente ne peut en aucun cas être atteinte. Ainsi, l'injecteur empêche comme prévu le phénomène de cavitation.

Pour aller plus vite dans le calcul, on peut remarquer que $(d/D)^4 \ll 1$ et négliger ce terme. On obtient alors comme condition de cavitation

$$H_0 > \frac{P_0 - P_{\text{sat}}}{\rho g} + H$$

ce qui n'est pas possible, puisque $H_0 < H$ nécessairement.

4 Connaître le débit de sortie Q permet d'en déduire la vitesse réelle en sortie de l'injecteur,

$$v_s = \frac{Q/4}{\pi d^2/4} = \frac{Q}{\pi d^2}.$$

Le théorème de Bernoulli appliqué entre la surface libre de la retenue d'eau et la sortie de l'injecteur, prenant en compte les pertes de charge sous forme d'une hauteur h^* , donne

$$\underbrace{\left(\frac{P_0}{\rho} + \frac{v_s^2}{2} + 0\right)}_{\text{sortie}} - \underbrace{\left(\frac{P_0}{\rho} + \frac{0^2}{2} + gH\right)}_{\text{entrée}} = -gh^*,$$

ce qui donne

$$h^* = H - \frac{v_s^2}{2g} = 10 \text{ m}.$$

5 Appliquons encore une fois le théorème de Bernoulli, cette fois entre l'entrée et la sortie de la turbine, avec un débit massique total ρQ et en tenant compte de la puissance \mathcal{P} cédée par le fluide à la turbine,

$$\rho Q \left[\underbrace{\left(\frac{P_0}{\rho} + \frac{0^2}{2} + 0\right)}_{\text{sortie}} - \underbrace{\left(\frac{P_0}{\rho} + \frac{v_s^2}{2} + 0\right)}_{\text{entrée}} \right] = -\mathcal{P}$$

d'où on déduit

$$\mathcal{P} = \frac{\rho Q v_s^2}{2} = \frac{\rho Q^3}{2\pi^2 d^4} = 66 \text{ kW}.$$