BLAISE PASCAL
PT 2020-2021

Préparation à l'oral

Mécanique

Correction

Exercice 1 : Balle de golf dans un looping

oral banque PT | 2 | 2 |

- *Conservation de l'énergie mécanique ;*
- *Décollement d'un support ;*
- *Chute libre.*

On choisit l'origine du repère au centre du demi-cylindre, et θ compté à partir de l'horizontale, la balle entre donc dans le looping en $\theta = -\pi/2$.

1 Conservation de l'énergie mécanique :

$$E_\mathrm{m} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{init}}}{=} \frac{1}{2}m{v_0}^2 - mgR \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cylindre}}}{=} \frac{1}{2}mv^2 + mgR\sin\theta \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{v^2 = {v_0}^2 - 2gR(1+\sin\theta)\,.}$$

2 Il ne faut pas que la vitesse s'annule, donc

$$v_0 > 2\sqrt{gR}\,.$$

3 Accélération dans un mouvement circulaire :

$$\vec{a} = -R\dot\theta^2\,\vec{e}_r + R\ddot\theta\,\vec{e}_\theta\,.$$

Projection du poids :

$$\vec{P} = mg(-\sin\theta\,\vec{e}_r - \cos\theta\,\vec{e}_\theta)$$

Projection du PFD sur $\vec{e}_r$:

$$-mR\dot\theta^2 = -mg\sin\theta - N\,.$$

Or avec la conservation de l'énergie (cf. 1ère question) :

$$R\dot\theta^2 = \frac{{v_0}^2}{R} - 2g(1+\sin\theta)$$

ce qui donne

$$-\frac{m{v_0}^2}{R} + 2mg(1+\sin\theta) = -mg\sin\theta - N$$

et enfin

$$N = \frac{m{v_0}^2}{R} - mg(2+3\sin\theta)$$

4 $N > 0$ partout donc ${v_0}^2 > 5gR$

5 Conservation de l'énergie :

$$E_\mathrm{m} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{init}}}{=} \frac{1}{2}m{v_0}^2 - mgR \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sortie}}}{=} \frac{1}{2}mv^2 + mgR \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{v_\mathrm{s}^2 = {v_0}^2 - 4gR\,.}$$

6 Chute libre :

$$\begin{cases} \ddot x = 0 \\ \ddot z = -g \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} \dot x = -v_\mathrm{s} \\ \dot z = -gt \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} x = -v_\mathrm{s}t \\ z = -\dfrac{1}{2}gt^2 + R \end{cases}$$

On en déduit l'équation de la trajectoire :

$$z(x) = R - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{{v_0}^2 - 4gR}\,.$$

On cherche alors x tel que

$$z(x) = -R \qquad \text{soit} \qquad \frac{1}{2} g \frac{x^2}{{v_0}^2 - 4gR} = 2R \qquad \text{d'où} \qquad x = -\sqrt{\frac{4R({v_0}^2 - 4gR)}{g}}$$

Exercice 2 : Cyclotron

inspiré CCP PC 2014 et oral banque PT | 2 | 2 |

▷ *Mouvement d'une charge dans un champ électromagnétique.*

▷ Système : un proton, assimilé à un point matériel de masse m et charge q.
▷ Référentiel : lié au cyclotron, donc a priori le référentiel terrestre, en bonne approximation galiléen.
▷ Bilan des forces : le proton n'est soumis qu'à la force de Lorentz (qui diffère en fonction des zones), devant laquelle le poids est négligeable.

1 À l'intérieur des dees seule la force magnétique $\vec{F}_B = e\vec{v} \wedge \vec{B}$ existe. D'après le théorème de l'énergie cinétique,

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} = e(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0 \qquad \text{soit} \qquad mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0\,.}$$

2 La trajectoire d'un proton dans un champ magnétique est un arc de cercle, parcouru à vitesse constante. Utilisons un repérage polaire, centré sur le centre de l'arc de cercle. D'après la loi de la quantité de mouvement,

$$m\vec{a} = e\,\vec{v} \wedge \vec{B}$$

soit en utilisant les résultats connus sur la cinématique d'un tel mouvement,

$$m\left(-\frac{v^2}{R}\vec{e}_r\right) = e\,v\,B(-\vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_z) = -e\,v\,B\,\vec{e}_r$$

en utilisant $\vec{v} = -v\,\vec{e}_\theta$: la trajectoire est parcourue en sens horaire pour un proton, résultat que vous pouvez ou bien connaître ou bien retrouver ici à partir de la cohérence des signes. Finalement,

$$\frac{m\,v^2}{R} = e\,v\,B \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{R = \frac{mv}{eB}\,.}$$

La trajectoire dans un dee est un demi-cercle de longueur πR, parcourue en un temps

$$\boxed{\Delta t_\mathrm{d} = \frac{\pi R}{v} = \frac{\pi m}{eB} = 22\,\mathrm{ns}\,.}$$

On remarque que Δt_d ne dépend pas de la vitesse du proton, mais seulement du champ appliqué au dee (et évidemment de caractéristiques intrinsèques du proton, e et m).

3 Pour que le proton soit accéléré de façon optimale à chaque passage entre les dees, il faut que la force électrique qu'il subit soit alternativement orientée selon $+\vec{u}_x$ lorsqu'il passe de D_2 à D_1 et selon $-\vec{u}_x$ lorsqu'il passe de D_1 à D_2. En négligeant le temps de passage dans l'espace entre les dees ($a \ll \pi R$), il faut donc qu'une demi-période de la tension appliquée soit égale à Δt_d, soit pour la période

$$T = 2\Delta t_\mathrm{d} = \frac{2\pi m}{eB} \qquad \text{et} \qquad \boxed{f = \frac{eB}{2\pi m} = 23\,\mathrm{MHz}\,.}$$

Utiliser une tension harmonique plutôt qu'une tension créneau a l'intérêt de regrouper tous les protons pour que leur passage dans les dees soit en phase avec la tension. Regrouper les protons permet aux impulsions du faisceau d'être plus puissantes. De plus, en pratique, une tension créneau requiert beaucoup d’harmoniques qu’il peut ne pas être simple d’imposer à de telles fréquences.

4 Jusqu’à présent, nous avons relié le rayon à la vitesse du proton. Il faut donc maintenant relier la vitesse du proton au nombre de passage dans les dees, ou plutôt au nombre de passage dans la zone accélératrice. Comme on ne s’intéresse qu’à la norme, le théorème de l’énergie cinétique est le plus adapté. Appliquons ce théorème sur une trajectoire entre la sortie d’un dee et l’entrée de l’autre, en supposant que le passage du proton se fait au moment où la tension atteint son maximum (justifié par la question précédente), et en supposant aussi que la durée de passage dans la zone accélératrice est négligeable devant la période de la tension, ce qui permet de supposer que la tension est presque constante égale à U_m. Sous ces hypothèses, on trouve

$$\frac{1}{2}m{v_{n+1}}^2 - \frac{1}{2}m{v_n}^2 = W(\overrightarrow{F_E}) = e\frac{U_\mathrm{m}}{a}a$$

En raisonnant par récurrence, on obtient

$$\frac{1}{2}m{v_n}^2 - \frac{1}{2}m{v_0}^2 \simeq \frac{1}{2}m{v_n}^2 = neU_\mathrm{m} \qquad \text{soit} \qquad v_n = \sqrt{\frac{2neU_\mathrm{m}}{m}}$$

et en utilisant le résultat d’une question précédente,

$$R_n = \frac{m}{eB}\sqrt{\frac{2neU_\mathrm{m}}{m}} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{R_n = \sqrt{\frac{2nmU_\mathrm{m}}{B^2 e}}}$$

5 Remarquons bien que n compte le nombre de passage dans la zone accélératrice, faire un tour complet revient donc à passer de n à $n+2$. Après un tour, $n = 2$ et

$$v_2 = \sqrt{\frac{4eU_\mathrm{m}}{m}} \qquad \text{et} \qquad R_2 = 2\sqrt{\frac{mU_\mathrm{m}}{eB^2}} = 6{,}1\,\mathrm{cm}$$

Après dix tours, $n = 20$ et

$$\boxed{R_{20} = \sqrt{10}\,R_2 = 19\,\mathrm{cm}}$$

6 Avec $R_\mathrm{N} = 35\,\mathrm{cm}$, la vitesse finale vaut

$$v_\mathrm{fin} = \frac{eBR_N}{m} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{E_\mathrm{c,fin} = \frac{e^2B^2R_N^2}{2m} = 2{,}1\cdot 10^{-12}\,\mathrm{J} = 14\,\mathrm{MeV}}$$

puis

$$E_\mathrm{c,fin} = NeU_\mathrm{m} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{N = \frac{E_\mathrm{c,fin}}{eU_\mathrm{m}} = 33}$$

ce qui correspond à 16 tours et demi au sein du cyclotron.

Exercice 3 : Régulateur d’Archereau-Foucault 2 | 1

- *Solide en rotation ;*
- *Force de liaison.*

Toute l’étude est menée dans le référentiel terrestre, supposé galiléen en très bonne approximation.

1 Comme le fil est inextensible et tendu, aussi bien sur la partie « libre » que sur la partie enroulée, alors tous les points du fil ont la même vitesse instantanée. Ceux encore enroulés sur le cylindre sont en mouvement circulaire à vitesse angulaire ω, leur vitesse vaut donc $R\omega$. Le point d’attache entre le contrepoids P et le fil se déplace lui à la vitesse $\dot{z}$ de P. Ainsi,

$$\boxed{\dot{z} = R\omega\,.}$$

2 Considérons comme système le point matériel P. Il est soumis à son poids $m\vec{g}$ et à la force de tension du fil $\overrightarrow{T'}$, verticale et vers le haut. D’après la loi de la quantité de mouvement,

$$m\ddot{z}\vec{u}_z = mg\vec{u}_z + \overrightarrow{T'} \qquad \text{d'où} \qquad \overrightarrow{T'} = m(\ddot{z} - g)\vec{u}_z\,.$$

D'après le principe des actions réciproques, le contrepoids P exerce sur le fil une force $-\overrightarrow{T'}$. Comme le fil est supposé idéal et tendu, alors il transmet parfaitement la force et exerce en I la même force $-\overrightarrow{T'} = \overrightarrow{T}$ par définition. Ainsi,

$$\boxed{\overrightarrow{T} = m(g - \ddot{z})\overrightarrow{u}_z\,.}$$

3

▷ Système : le cylindre, solide de moment d'inertie J_x ;
▷ Bilan des actions mécaniques :
  → la liaison pivot et le poids du cylindre exercent tous les deux un moment nul par rapport à l'axe Ox ;
  → les frottements avec l'air exercent un couple $\Gamma_\text{f} = -\lambda\omega$;
  → la force $\overrightarrow{T}$, de bras de levier R, a un moment non nul qui vaut $+TR$ car elle tend à faire tourner le cylindre dans le sens direct.

Comme le moment cinétique du cylindre par rapport à Ox vaut $J_x\omega$, on a d'après le théorème du moment cinétique

$$J_x\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\lambda\omega + m(g - \ddot{z})R$$

Or d'après la première question $\ddot{z} = R\dot{\omega}$, donc

$$J_x\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\lambda\omega + mgR - mR^2\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

ce qui conduit à

$$\boxed{(J_x + mR^2)\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + \lambda\omega = mgR\,.}$$

4 Écrite sous forme canonique, cette équation devient

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + \frac{\lambda}{J_x + mR^2}\omega = \frac{mgR}{J_x + mR^2}\,,$$

faisant apparaître un temps caractéristique

$$\tau = \frac{J_x + mR^2}{\lambda}\,.$$

Comme le forçage est constant, une solution particulière est donnée par

$$\omega_\text{p} = \frac{mgR}{\lambda}\,,$$

et la forme générale des solutions est

$$\omega(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \omega_\text{p}\,,$$

où la constante A se détermine à partir des conditions initiales. Au bout d'une durée de l'ordre de 5τ, la vitesse de rotation devient donc pratiquement égale à ω_p : **le dispositif permet de réguler la vitesse de rotation du cylindre**.

Exercice 4 : Orbite de transfert de Hohmann 2 | 2

▷ *Conservation du moment cinétique ;*
▷ *Orbite circulaire et elliptique ;*
▷ *Énergie mécanique.*

1 Étudions dans le référentiel géocentrique le mouvement du satellite sur une orbite circulaire de rayon r. Il n'est soumis qu'à la force de gravitation exercée par la Terre de masse m_0. D'après le théorème de l'énergie cinétique,

$$\frac{\mathrm{d}E_\text{c}}{\mathrm{d}t} = -\mathcal{G}\frac{m_0 m}{r^2}\overrightarrow{e}_r \cdot v\,\overrightarrow{e}_\theta = 0 \qquad \text{d'où} \qquad v = \text{cte}\,,$$

le mouvement est donc uniforme. D'après le théorème de la résultante cinétique,

$$m\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}\right|_\mathcal{R} = -\mathcal{G}\frac{m_0 m}{r^2}\overrightarrow{e}_r \qquad \text{soit} \qquad -m\frac{v^2}{r}\overrightarrow{e}_r = -\mathcal{G}\frac{m_0 m}{r^2}\overrightarrow{e}_r$$

En projetant et en simplifiant, on en déduit

$$\frac{v^2}{r} = \mathcal{G}\frac{m_0}{r^2} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{v = \sqrt{\frac{m_0\mathcal{G}}{r}}\,.}$$

> *Rappelons que l'accélération d'un point matériel en mouvement circulaire uniforme est purement centripète et vaut*
> $$\vec{a} = -\frac{v^2}{r}\,\vec{e}_r\,.$$
> *C'est un résultat à connaître et utilisable sans démonstration.*

On en déduit
$$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2} m \frac{m_0 \mathcal{G}}{r} - \mathcal{G}\frac{m_0 m}{r} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{E_\mathrm{m} = -\mathcal{G}\frac{m_0 m}{2r}\,.}$$

> *Trouver $E_\mathrm{m} < 0$ est normal car le satellite est dans un état lié.*

2 On constate sur la figure que le grand-axe de l'orbite de transfert vaut
$$2a = r_1 + r_2\,.$$
Ainsi,
$$E_\mathrm{m1} = -\mathcal{G}\frac{m_0 m}{2r_1} \qquad E'_\mathrm{m} = -\mathcal{G}\frac{m_0 m}{r_1 + r_2} \qquad \boxed{E_\mathrm{m2} = -\mathcal{G}\frac{m_0 m}{2r_2}\,.}$$
Le travail fourni par le moteur pour le passage sur l'orbite de transfert est égale à la différence d'énergie mécanique pour un rayon r_1,
$$W_1 = E'_\mathrm{m} - E_\mathrm{m1} = -\mathcal{G}\frac{m_0 m}{r_1 + r_2} + \mathcal{G}\frac{m_0 m}{2r_1} = \mathcal{G} m_0 m \left(\frac{1}{2r_1} - \frac{1}{r_1 + r_2}\right)$$
et finalement
$$\boxed{W_1 = \frac{\mathcal{G} m_0 m (r_2 - r_1)}{2 r_1 (r_1 + r_2)}\,.}$$
De même,
$$W_2 = E_\mathrm{m2} - E'_\mathrm{m} = -\mathcal{G}\frac{m_0 m}{2r_2} + \mathcal{G}\frac{m_0 m}{r_1 + r_2} = \mathcal{G} m_0 m \left(\frac{1}{r_1 + r_2} - \frac{1}{2r_2}\right)$$
et finalement
$$\boxed{W_2 = \frac{\mathcal{G} m_0 m (r_2 - r_1)}{2 r_2 (r_1 + r_2)}\,.}$$

3 La variation d'énergie mécanique se fait à $r = r_1$, donc sans variation d'énergie potentielle, mais uniquement en modifiant l'énergie cinétique. Ainsi,
$$W_1 = \frac{1}{2} m {v'_1}^2 - \frac{1}{2} m {v_1}^2 \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathcal{G} m_0 m (r_2 - r_1)}{2 r_1 (r_1 + r_2)} = \frac{1}{2} m {v'_1}^2 - \mathcal{G}\frac{m_0 m}{2 r_1}$$
ce qui donne
$${v'_1}^2 = \mathcal{G} m_0 \left(\frac{r_2 - r_1}{r_1(r_1 + r_2)} + \frac{1}{r_1}\right) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{v'_1 = \sqrt{\frac{2 r_2}{r_1 (r_1 + r_2)} \mathcal{G} m_0}\,.}$$

4 Appliquons le théorème du moment cinétique au satellite, par rapport au centre O de la Terre,
$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t}\right|_\mathcal{R} = (r\,\vec{e}_r) \wedge \left(-\mathcal{G}\frac{m_0 m}{r^2}\,\vec{e}_r\right) = \vec{0} \qquad \text{d'où} \qquad \vec{L}_O = \overrightarrow{\mathrm{cte}}\,.$$
Or par définition du moment cinétique, exprimé en coordonnées polaires,
$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} = r\,\vec{e}_r \wedge m(\dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta) = m r^2 \dot{\theta}\,\vec{e}_z\,.$$
La conservation du moment cinétique au cours du mouvement implique donc la conservation de la constante des aires $C = r^2\dot{\theta}$.

5 Par définition, l'apogée et le périgée correspondent aux positions de rayon extrémal, donc en ces points $\dot{r} = 0$ et $\vec{v} = r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$. Ainsi, la constante des aires écrite au périgée et à l'apogée donne
$$C = r_1 v'_1 = r_2 v'_2 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{v'_2 = \frac{r_1}{r_2} v_1\,.}$$

Exercice 5 : Sieste en hamac — 3 | 1

▷ *Problème ouvert ;*
▷ *Force de liaison.*

- **Modélisation**

Pour faire simple, je te modélise par un point matériel de masse m suspendu par des cordes de même longueur, supposées inextensibles et tendues. Une modélisation par un solide indéformable ne changerait qualitativement rien. Le dispositif est donc symétrique, voir figure 1. Pour minimiser le risque que les cordes cassent, il faut minimiser leur force de tension, c'est-à-dire qu'il faut trouver la valeur de α qui minimise la norme de $\vec{T}$ et $\vec{T'}$, que je note plus simplement T et T'.

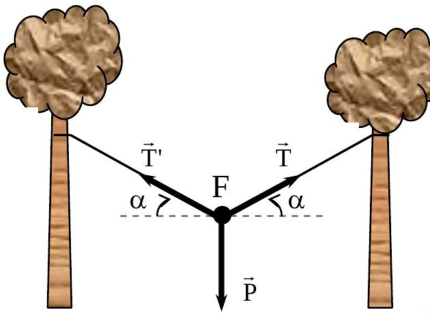

Figure 1 – Un point matériel en train de faire la sieste dans son hamac.

- **Mise en équation**

Tu es le système en « mouvement » dans le référentiel terrestre, qu'on peut considérer galiléen. On y fixe un repère (Oxy). Tu es soumis à
▷ ton poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_y$;
▷ la force de tension $\vec{T} = T(\cos\alpha\,\vec{u}_x + \sin\alpha\,\vec{u}_y)$;
▷ la force de tension $\vec{T'} = T'(-\cos\alpha\,\vec{u}_x + \sin\alpha\,\vec{u}_y)$;
Par application de la loi de la quantité de mouvement, on a vectoriellement puis en projection

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{T'} = \vec{0} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} (T - T')\cos\alpha = 0 \\ -mg + (T + T')\sin\alpha = 0 \end{cases}$$

On en déduit finalement que $T' = T$, ce dont on pouvait se douter vue la symétrie des cordes, et

$$2T\sin\alpha = mg \qquad \text{d'où} \qquad T = T' = \frac{mg}{2\sin\alpha}$$

La tension des cordes est d'autant plus faible que $\sin\alpha$ est grand, donc que α est proche de $\pi/2$.

- **Conclusion**

Il vaut mieux que tu laisses pendre le hamac pour être sûr de ne pas tomber ... mais je ne sais pas si ce sera très favorable pour ta sieste :)

Exercice 6 : Vitesse d'un marcheur — oral banque PT | 3 | 2

▷ *Problème ouvert ;*
▷ *Solide en rotation.*

Commençons par déterminer la fréquence des pas, en modélisant une jambe par un pendule pesant fait de la tige homogène dont l'énoncé donne le moment d'inertie. Elle est soumise à son propre poids qui s'exerce en G, au niveau du genou, et aux actions d'une liaison pivot supposée parfaite au niveau de la hanche. Le moment du poids par rapport à l'axe de rotation vaut

$$\vec{\mathcal{M}}(\vec{P}) = \frac{\ell}{2}\vec{e}_r \wedge (-mg\,\vec{e}_y) = -\frac{mg\ell}{2}(\sin\theta\,\vec{e}_x - \cos\theta\,\vec{e}_y) \wedge \vec{e}_y = -\frac{mg\ell}{2}\sin\theta\,\vec{e}_z\,. \qquad \text{d'où} \qquad \mathcal{M}_z(\vec{P}) = -\frac{mg\ell}{2}\sin\theta\,.$$

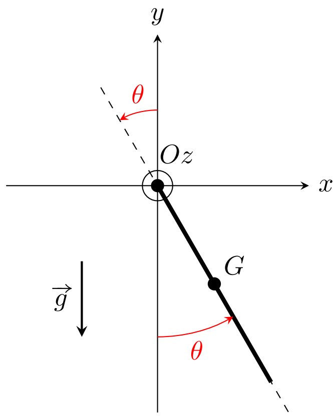

Figure 2 – Modélisation d'une jambe.

D'après le théorème du moment cinétique appliqué à la jambe dans le référentiel terrestre, supposé galiléen,

$$J\ddot{\theta} = \mathcal{M}_z(\vec{P}) + \underbrace{\cancel{\mathcal{M}_{z,\text{pivot}}}}_{\text{parfaite}} = -\frac{mg\ell}{2}\sin\theta$$

ce qui conduit à l'équation du mouvment

$$\ddot{\theta} + \frac{mg\ell}{2J}\sin\theta = 0\,.$$

> *Il y a un facteur 2 car on suppose que le centre d'inertie de la jambe se trouve en son milieu, donc à distance $\ell/2$ de l'axe.*

Le mouvement de la jambe étant d'amplitude assez faible (45° grand maximum), on peut linéariser le sinus et approximer la pulsation des oscillations à la pulsation propre,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mg\ell}{2J}} = \sqrt{\frac{3g}{2\ell}}$$

et ainsi la période du mouvement est de l'ordre de

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2\ell}{3g}}\,.$$

En considérant qu'une jambe mesure environ 1 m, on trouve numériquement

$$T \simeq 1{,}6\,\mathrm{s}$$

ce qui semble tout à fait raisonnable. En supposant par ailleurs qu'un pas mesure un peu moins d'un mètre, disons $d = 80\,\mathrm{cm}$ pour simplifier les calculs, on peut en déduire la vitesse de marche, mais attention, un pas ne correspond qu'à la moitié d'une période du mouvement de la jambe.

$$\boxed{v = \frac{2d}{T} = 1\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \simeq 3{,}6\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}\,.}$$

On trouve un ordre de grandeur excellent, puisque la vitesse typique de marche est de l'ordre de 4 à $5\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$.

On pourrait conclure que le modèle est assez chanceux de retomber sur la bonne valeur. Dans le cas présent, je pense plutôt que l'accord est dû au fait que l'évolution (la biologie) a favorisé un mouvement de marche qui se fasse à moindre coût pour le corps humain, et qui donc exploite au mieux les lois de la physique.