



Électromagnétisme

Exercice 1 : Charge en surface d'une cellule

oral banque PT | 💡 1 | ✂️ 1



- ▷ Lien entre champ et potentiel ;
- ▷ Théorème de Gauss ;
- ▷ Relation de passage ;
- ▷ Coordonnées cartésiennes.

1 La membrane peut être considérée localement plane si $e \ll R$ et d'épaisseur infinie si $a \ll e$.

2 Comme le champ est statique,

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V = -\frac{dV}{dx} \vec{u}_x,$$

d'où

$$\vec{E}(x) = \begin{cases} \vec{0} & \text{pour } x \leq 0 \\ +\frac{V_0}{a} e^{-x/a} \vec{u}_x & \text{pour } x > 0 \end{cases}$$

3 D'après l'équation de Maxwell-Gauss,

$$\rho = \varepsilon_0 \text{div} \vec{E} = \varepsilon_0 \frac{dE}{dx}$$

d'où

$$\rho = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \leq 0 \\ -\frac{\varepsilon_0 V_0}{a^2} e^{-x/a} & \text{pour } x > 0 \end{cases}$$

D'après la relation de passage donnée et les expressions des champs,

$$\sigma = \frac{\varepsilon_0 V_0}{a}.$$

4 Je suppose que l'examinateur souhaite un calcul où le cylindre se trouve de part et d'autre de la membrane. On raisonne donc sur un cylindre de section S et situé entre $x' < 0$ et $x > 0$. La charge contenue dans ce cylindre vaut

$$Q = \int_{x'}^x \rho(x) S dx + \sigma S = -\frac{\varepsilon_0 V_0 S}{a^2} \int_0^x e^{-x/a} dx + \sigma S$$

Le calcul de l'intégrale donne

$$\int_0^x e^{-x/a} dx = \left[-a e^{-x/a} \right]_0^x = a \left(1 - e^{-x/a} \right).$$

On en déduit

$$Q = -\frac{\varepsilon_0 V_0 S}{a} \left(1 - e^{-x/a} \right) + \frac{\varepsilon_0 V_0 S}{a} \quad \boxed{Q = \frac{\varepsilon_0 V_0 S}{a} e^{-x/a}}$$

Ce résultat signifie que l'effet de la charge surfacique portée par la membrane de la cellule s'atténue exponentiellement avec une longueur caractéristique a . Cette atténuation est due à la présence des ions dans l'électrolyte, qui viennent se grouper par charge opposée autour de la membrane et finissent par masquer cette charge à suffisamment grande distance : le phénomène porte le nom d'écrantage.

Exercice 2 : Flocculation d'une suspension colloïdale

oral banque PT | 💡 3 | ✂ 3



- ▷ Équation de Poisson ;
- ▷ Lien entre champ et potentiel ;
- ▷ Théorème de Gauss ;
- ▷ Coordonnées sphériques.

L'énoncé est fidèle à celui rapporté par le candidat, j'y ai juste ajouté le document pour préciser le contexte et donner du sens aux calculs.

1 Le rayon d'un ion est similaire à celui d'un atome, de l'ordre de 10^{-10} m, très inférieur à celui du colloïde.

2 La densité de charge s'écrit

$$\rho(r) = zeN_+(r) - zeN_-(r) = zeN_0 \left(e^{-zeV(r)/k_B T} - e^{+zeV(r)/k_B T} \right).$$

Comme $|zeV(r)| \ll k_B T$, on peut développer au premier ordre

$$\rho(r) \simeq zeN_0 \left(1 - \frac{zeV(r)}{k_B T} - 1 - \frac{zeV(r)}{k_B T} \right)$$

soit finalement

$$\rho(r) \simeq -\frac{2z^2 e^2 N_0}{k_B T} V(r).$$

3 • **Équation différentielle sur V** : D'après l'équation de Poisson,

$$\Delta V = -\frac{\rho(r)}{\varepsilon_0} = \frac{2z^2 e^2 N_0}{\varepsilon_0 k_B T} V(r).$$

En utilisant l'expression du laplacien fournie,

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (rV) = \frac{2z^2 e^2 N_0}{\varepsilon_0 k_B T} V(r),$$

ce que l'on écrit sous la forme

$$\frac{d^2}{dr^2} (rV) - \frac{2z^2 e^2 N_0}{\varepsilon_0 k_B T} rV(r) = 0.$$

On reconnaît une équation différentielle du second ordre portant sur la fonction $u(r) = rV(r)$, et on introduit une longueur caractéristique

$$\delta = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k_B T}{2z^2 e^2 N_0}},$$

soit

$$\frac{d^2 u}{dr^2} - \frac{1}{\delta^2} u = 0.$$

• **Résolution** : Le polynôme caractéristique associé à cette équation s'écrit

$$r^2 - \frac{1}{\delta^2} = 0 \quad \text{d'où} \quad r_{\pm} = \pm 1/\delta.$$

Les solutions de cette équation sont donc de la forme

$$u(r) = A e^{-r/\delta} + B e^{r/\delta},$$

soit

$$V(r) = \frac{A}{r} e^{-r/\delta} + \frac{B}{r} e^{r/\delta}.$$

En supposant le potentiel électrostatique nul à l'infini (possible car distribution finie), on en déduit que $B = 0$:

$$V(r) = \frac{A}{r} e^{-r/\delta}.$$

4 Le champ électrique s'obtient par dérivation du potentiel,

$$E_r(r) = -\frac{dV}{dr} \quad \text{soit} \quad E_r(r) = \frac{A}{r^2} e^{-r/\delta} - \frac{A}{r} \times \frac{-1}{\delta} e^{-r/\delta}$$

ce qui s'écrit finalement

$$E_r(r) = \frac{A}{r^2} \left(1 + \frac{r}{\delta}\right) e^{-r/\delta}.$$

On retrouve bien la forme de l'énoncé.

On raisonne sur une surface de Gauss sphérique de rayon R , identique à celle du colloïde. D'après le théorème de Gauss,

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \text{soit} \quad \frac{A}{R^2} \left(1 + \frac{R}{\delta}\right) e^{-R/\delta} \times 4\pi R^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

d'où on déduit

$$A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\left(1 + \frac{R}{\delta}\right) e^{-R/\delta}}$$

5 En l'absence des ions, $N_0 = 0$ donc $\delta \rightarrow \infty$. Le champ électrique créé par le colloïde pour $r > R$ équivaut à celui d'une charge ponctuelle, $E_r(r) = Q/4\pi\varepsilon_0 r^2$, qui décroît comme $1/r^2$. L'ajout des sels ioniques renforce nettement cette décroissance à grande distance ($r \gg \delta$) puisque le terme en $1/r^2$ est remplacé par $e^{-r/\delta}/r$. Ainsi, les ions permettent d'écranter le champ créé par le colloïde, et ce faisant de masquer sa présence aux colloïdes environnants, ce qui est favorable à la floculation.

Exercice 3 : Puissance transportée par un éclair

oral banque PT | 💡 2 | ✂ 2



- ▷ Théorème de Gauss ;
- ▷ Condensateur ;
- ▷ Coordonnées sphériques.

On se place bien sûr en coordonnées sphériques.

1 • **Invariances et symétries** : on se place en un point M quelconque.

- ▷ la distribution est invariante par toute rotation autour du centre des sphères, donc le champ électrique ne dépend pas des coordonnées angulaires θ et φ ;
- ▷ tout plan contenant la droite (OM) est un plan de symétrie de la distribution de charges, donc le champ électrique doit se trouver dans chacun de ces plans : il est donc forcément colinéaire à \vec{OM} ;
- ▷ en conclusion,

$$\vec{E}(M) = E_r(r) \vec{e}_r.$$

• **Théorème de Gauss** : on choisit comme surface de Gauss une sphère de centre O .

- ▷ Flux sortant : comme le champ est uniforme sur la sphère,

$$\oiint_{SG} E_r(r) \vec{e}_r \cdot dS \vec{e}_r = 4\pi r^2 E_r(r).$$

▷ Charge intérieure :

- si $r < R$ alors $Q_{\text{int}} = 0$;
- si $R < r < R + h$ alors $Q_{\text{int}} = -Q$;
- si $r > R + h$ alors $Q_{\text{int}} = 0$.

▷ Conclusion :

$$\vec{E} = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } r < R \\ -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{e}_r & \text{si } R < r < R + h \\ \vec{0} & \text{si } r > R + h \end{cases}$$

On peut en fait aller beaucoup plus vite : comme la distribution est à symétrie sphérique, alors le champ électrique qu'elle crée à une distance r du centre est identique à celui d'une charge ponctuelle égale à la charge intérieure à une sphère de rayon r qui serait placée au centre de la distribution. Il

s'agit d'un résultat à connaître d'après le programme : vous pouvez donc l'utiliser tel quel, mais je vous recommande malgré tout d'être prêt dans un oral à ce que l'examineur vous interroge sur le théorème de Gauss dans la foulée.

2 Par définition du potentiel électrostatique,

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \quad \text{soit} \quad E_r = -\frac{dV}{dr} \quad \text{donc} \quad \frac{dV}{dr} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

En séparant les variables,

$$\int_0^V dV = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_R^{R+h} \frac{dr}{r^2},$$

ce qui donne

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{R+h} + \frac{1}{R} \right) \quad \text{soit} \quad \boxed{V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{h}{R(R+h)}}.$$

Attention, comme on utilise l'expression de \vec{E} entre les deux sphères alors l'expression de V que l'on obtient n'est valable que dans ce domaine.

3 Par définition,

$$C = \frac{Q}{V-0} \quad \text{donc} \quad \boxed{C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R(R+h)}{h}}.$$

4 Comme $h \ll R$, on peut faire l'approximation $R+h \simeq R$, donc

$$\boxed{C = \epsilon_0 \frac{4\pi R^2}{h} = 7,6 \cdot 10^{-5} \text{ F}}.$$

On reconnaît l'expression de la capacité d'un condensateur plan d'épaisseur h dont les armatures ont une surface $4\pi R^2$: comme la distance inter-armatures est très faible, elles sont localement vues comme des plans.

5 Sans plus de précision, on ne peut que supposer que l'éclair permet de décharger localement le condensateur formé par l'ionosphère et la Terre. La charge transférée vaut

$$Q = I \Delta t = 7,5 \cdot 10^2 \text{ C},$$

ce qui signifie que la valeur initiale du potentiel V de l'ionosphère était de

$$V = \frac{Q}{C} \sim 1 \cdot 10^7 \text{ V}.$$

Le puissance moyenne au cours de l'éclair vaut donc

$$\boxed{\mathcal{P} \sim V I = 3 \cdot 10^{11} \text{ W}}.$$

Le candidat indique dans son retour d'oral qu'il n'est plus certain de la dernière question ... et je ne suis pas non plus certain de ma reconstitution : un éclair n'a pas lieu entre l'ionosphère et le sol, mais entre le bas du nuage d'orage et le sol. En première approximation, on peut considérer que le nuage se trouve à quelques kilomètres du sol, disons 6 km pour pouvoir facilement comparer : h serait divisé par 10, donc C multiplié par 10, donc V divisé par 10. La puissance serait donc plutôt de l'ordre de $3 \cdot 10^{10} \text{ W}$... ce qui correspond davantage à l'ordre de grandeur que l'on peut trouver sur des sites dédiés aux orages.

Exercice 4 : Câble coaxial

oral CCINP PSI |  2 |  2 | 

- ▷ Théorème de Gauss ;
- ▷ Condensateur ;
- ▷ Théorème d'Ampère ;
- ▷ Énergie magnétique.

1 Un théorème de Gauss sauvage apparaît ! La distribution de charge est schématisée figure 1.

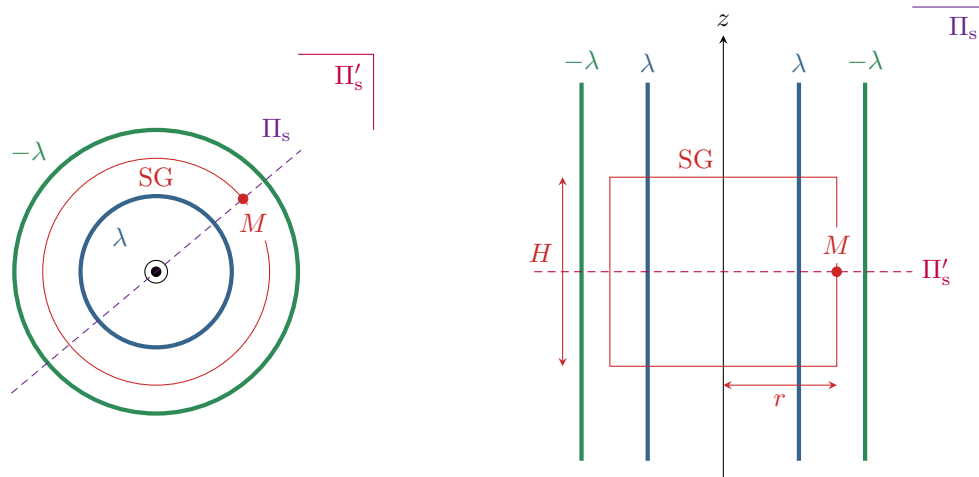


Figure 1 – Distribution de charge dans le câble coaxial.

• **Symétries :**

- ▷ le plan $\Pi_s = (M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est plan de symétrie de la distribution de charges ;
- ▷ le plan $\Pi'_s = (M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est plan de symétrie de la distribution de charges ;
- ▷ le champ électrique est inclus dans ces deux plans, donc

$$\vec{E}(M) = E_r(M) \vec{e}_r .$$

- **Invariances :** en supposant le câble infini, la distribution de charges est invariante par toute translation d'axe (Oz) et toute rotation autour de cet axe, donc

$$\vec{E}(M) = E_r(r) \vec{e}_r .$$

- **Surface de Gauss :** cylindre d'axe (Oz) passant par M , de rayon r et hauteur H , fermé par deux disques de normale \vec{e}_z .

• **Flux sortant :**

$$\oiint_{SG} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{bas}} (E_r \vec{e}_r) \cdot (-dS \vec{e}_z) + \iint_{\text{haut}} (E_r \vec{e}_r) \cdot (+dS \vec{e}_z) + \iint_{\text{lat}} E_r(r) \vec{e}_r \cdot dS \vec{e}_r = E_r(r) \times 2\pi r H .$$

- **Charge intérieure :** la question ne porte que sur le champ entre l'âme et le blindage. On constate que la surface de Gauss choisie correspond à une longueur H de câble en ne contenant que l'âme, si bien que la charge intérieure y vaut

$$Q_{\text{int}} = \lambda H .$$

Et il ne coûterait pas bien cher de constater que $Q_{\text{int}} = 0$ à l'intérieur de l'âme et à l'extérieur du blindage ($\lambda H - \lambda H = 0$) ! Ainsi, le champ électrostatique est nul à l'extérieur du câble coaxial : c'est l'un de ses intérêts, qui le rend robuste aux perturbations électromagnétiques.

- **Conclusion :** d'après le théorème de Gauss,

$$E_r(r) \times 2\pi r H = \frac{\lambda H}{\epsilon_0 \epsilon_r} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r r} \vec{e}_r .}$$

2 Par définition,

$$E_r = -\frac{dV}{dr} \quad \text{soit} \quad dV = -\frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \frac{dr}{r} .$$

En intégrant entre le blindage et l'âme,

$$\int_U^0 dV = -\frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} \quad \text{d'où} \quad -U = -\frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

et finalement

$$\lambda = \frac{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r}{\ln(R_2/R_1)} U.$$

3 En introduisant les grandeurs linéiques dans la définition de la capacité,

$$Q = CU \quad \text{donc} \quad \lambda dl = C dl U \quad \text{et} \quad C = \frac{\lambda}{U}.$$

Par identification avec la question précédente,

$$C = \frac{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r}{\ln(R_2/R_1)}.$$

4 Un théorème d'Ampère sauvage apparaît! La distribution de courant est schématisée figure 2. Elle n'est pas immédiate à comprendre, il ne faut surtout pas aller chercher plus loin que nécessaire ... et ce qui est nécessaire est de savoir que $\pm I$ désigne le courant *total* réparti en surface des conducteurs.

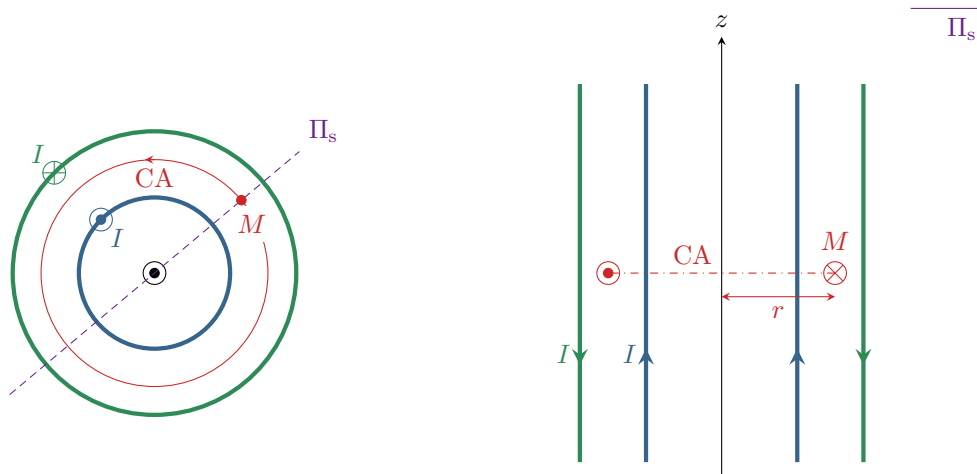


Figure 2 – Distribution de courant dans le câble coaxial.

• **Symétries** : le plan $\Pi_s = (M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est un plan de symétrie de la distribution de courant, donc le champ magnétique est orthogonal à ce plan,

$$\vec{B}(M) = B_\theta(M) \vec{e}_\theta.$$

⚠ ⚠ ⚠ **Attention !** Le plan Π'_s représenté figure 1 est un plan d'**anti**-symétrie de la distribution de courant : il n'y a aucune raison que les plans aient le même statut s/a pour les deux distributions. Le champ magnétique doit être inclus dans ce plan, ce qui est cohérent avec son caractère orthoradial.

• **Invariances** : la distribution de courant est invariante par toute translation d'axe (Oz) et toute rotation autour de cet axe, donc

$$\vec{B}(M) = B_\theta(r) \vec{e}_\theta.$$

• **Contour d'Ampère** : cercle de rayon r passant par M .

• **Circulation** :

$$\oint_{CA} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B_\theta(r) \times 2\pi r.$$

• **Courant enlacé** : la question ne porte à nouveau que sur le champ entre l'âme et le blindage, zone dans laquelle le courant enlacé vaut en tout point

$$I_{\text{enl}} = I.$$

Attention à ne pas se tromper dans le courant enlacé : comme déjà indiqué au début de l'exercice, I est le courant **total** qui parcourt l'âme.

On peut en plus constater qu'à l'intérieur de l'âme $I_{enl} = 0$ et à l'extérieur du blindage $I_{enl} = I - I = 0$. Comme le champ électrostatique, le champ magnétostatique est donc nul à l'extérieur du câble.

- **Conclusion** : d'après le théorème d'Ampère,

$$B_\theta(r) \times 2\pi r = \mu_0 I \quad \text{d'où} \quad \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta.}$$

- 5 La densité volumique d'énergie magnétique vaut

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 r^2} \times \frac{1}{2\mu_0} \quad \text{soit} \quad u_m = \frac{\mu_0}{8\pi^2 r^2} I^2.$$

Ainsi, l'énergie magnétique stockée dans le tronçon élémentaire de câble vaut

$$\begin{aligned} d\mathcal{E}_m &= \iint \frac{\mu_0}{8\pi^2 r^2} I^2 r \, dr \, d\theta \, d\ell \\ &= \frac{\mu_0}{8\pi^2} I^2 \int_0^{2\pi} d\theta \times d\ell \times \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} \\ &= \frac{\mu_0}{8\pi^2} I^2 \times 2\pi \times d\ell \times \ln \frac{R_2}{R_1} \end{aligned}$$

$$\boxed{d\mathcal{E}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} d\ell \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) I^2.}$$

- 6 L'énergie magnétique s'exprime en fonction de l'inductance $\mathcal{L} \, d\ell$ du tronçon

$$d\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} \mathcal{L} \, d\ell I^2$$

ce qui permet d'identifier

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} .}$$

Dans cette situation, la méthode énergétique est beaucoup plus facile que le calcul du flux propre pour calculer l'inductance : il n'est clairement pas évident de voir au travers de quelle surface le flux propre doit être calculé !

Exercice 5 : Transformateur torique



- ▷ Théorème d'Ampère ;
- ▷ Induction mutuelle.

- 1 Soit M un point quelconque de l'espace.

- **Symétries** : le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ (plan de la figure de droite de l'énoncé) est un plan de symétrie de la distribution de courant, donc $\vec{B}(M)$ est orthogonal à ce plan.

$$\rightsquigarrow \vec{B}(M) = B_\theta(M) \vec{e}_\theta.$$

- **Invariances** : en supposant les spires réparties continûment, alors la distribution de courant est invariante par rotation autour de l'axe (Oz) . Le champ $\vec{B}(M)$ ne dépend donc pas de θ , d'où

$$\boxed{\vec{B}(M) = B_\theta(r, z) \vec{e}_\theta.}$$

- **Théorème d'Ampère** :

▷ On raisonne sur un cercle passant par M et d'axe Oz , orienté par la règle de la main droite selon l'axe Oz .

▷ Circulation :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint B(r, z) \vec{e}_\theta \cdot d\ell \vec{e}_\theta = 2\pi r B(r, z).$$

▷ Courant enlacé : en raisonnant sur les schémas on peut facilement comprendre que le courant enlacé vaut

$$I_{\text{enl}} = \begin{cases} N_1 I_1 & \text{si } M \in \text{tore} \\ 0 & \text{si } M \notin \text{tore} \end{cases}$$

Il faut toujours se méfier du signe des courants enlacés, par règle de la main droite avec l'orientation du contour : ici c'est positif.

▷ Conclusion : d'après le théorème d'Ampère,

$$2\pi r B_\theta(r, z) = \begin{cases} \mu_0 N_1 I_1 & \text{si } M \in \text{tore} \\ 0 & \text{si } M \notin \text{tore} \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \vec{B}(M) = \begin{cases} \frac{\mu_0 N_1 I_1}{2\pi r} \vec{e}_\theta & \text{si } M \in \text{tore} \\ \vec{0} & \text{si } M \notin \text{tore} \end{cases}$$

• **Inductance propre** : Le flux au travers d'une seule spire vaut

$$\varphi_{1 \rightarrow 1\text{sp}} = \iint \frac{\mu_0 N_1 i_1}{2\pi r} dr dz = \frac{\mu_0 N_1 i_1}{2\pi} \times \ln \frac{R+a}{R} \times a,$$

donc le flux propre du primaire est

$$\Phi_{1 \rightarrow 1} = N_1 \varphi_{1 \rightarrow 1\text{sp}} = \underbrace{\frac{\mu_0 N_1^2 a}{2\pi} \ln \frac{R+a}{R}}_{=L_1} i_1$$

2 Par le même raisonnement,

$$L_2 = \frac{\mu_0 N_2^2 a}{2\pi} \ln \frac{R+a}{R}.$$

3 Toutes les spires sont identiques, donc

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = N_2 \varphi_{1 \rightarrow 1\text{sp}} = \underbrace{\frac{\mu_0 N_1 N_2 a}{2\pi} \ln \frac{R+a}{R}}_{=M} i_1$$

On constate alors que

$$M = \sqrt{L_1 L_2}.$$

4 La loi de comportement des bobines, modifiée par l'induction mutuelle, et avec $i_2 = 0$ car secondaire ouvert donne

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad \text{et} \quad u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

On en déduit alors

$$u_2 = \frac{M}{L_1} u_1 = \frac{N_2}{N_1} U_1 \cos(\omega t).$$

Si u_1 était constante, le courant i_1 serait constant également et la loi de comportement donnerait $u_2 = 0$.

On retrouve ici la loi des tensions d'un transformateur, en identifiant le rapport de transformation $m = N_2/N_1$.

5 Du rapport des amplitudes on déduit directement

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} = 20.$$

Exercice 6 : Supraconducteur

exemple officiel banque PT | 💡 2 | ✂️ 2



- ▷ Équations de Maxwell ;
- ▷ Théorème d'Ampère ;
- ▷ Inductance propre.

1 Les quatre équations de Maxwell s'écrivent

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{stat}}}{=} \vec{0} \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{stat}}}{=} \mu_0 \vec{j} \end{cases}$$

Soit une surface S s'appuyant sur un contour fermé C . On se place en régime stationnaire.

$$\begin{aligned} \iint_S \operatorname{rot} \vec{B} \cdot d\vec{S} &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{MA}}}{=} \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \mu_0 I_{\text{enl}} \\ &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Stokes}}}{=} \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell}, \end{aligned}$$

où I_{enl} est le courant enlacé par le contour C . Ainsi,

$$\boxed{\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enl}}.}$$

2 D'après l'équation de Maxwell-Ampère,

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{B}) &= \mu_0 \operatorname{rot} \vec{j} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{London}}}{=} -\frac{1}{\lambda^2} \vec{B} \\ &= \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{B}) - \Delta \vec{B} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{MT}}}{=} -\Delta \vec{B}. \end{aligned}$$

En identifiant on en déduit

$$\boxed{\Delta \vec{B} - \frac{1}{\lambda^2} \vec{B} = \vec{0}.}$$

3 L'énoncé n'est pas des plus clair ... il suppose implicitement qu'il y a invariance par translation selon x et y , et surtout qu'il y a continuité du champ magnétique en $x = 0$, ce qui n'est pas forcément le cas. Sous ces hypothèses, l'équation devient

$$\frac{d^2 \vec{B}}{dx^2} - \frac{1}{\lambda^2} \vec{B} = \vec{0}.$$

Le polynôme caractéristique s'écrit

$$r^2 - \frac{1}{\lambda^2} = 0 \quad \text{d'où} \quad r = \pm \frac{1}{\lambda}$$

et les solutions sont donc de la forme

$$\vec{B} = \vec{K}_1 e^{-x/\lambda} + \vec{K}_2 e^{+x/\lambda}$$

avec \vec{K}_1 et \vec{K}_2 deux constantes vectorielles. En admettant que le champ magnétique ne diverge pas lorsque $x \rightarrow +\infty$, on trouve

$$\vec{K}_2 = \vec{0}.$$

Enfin, en supposant la continuité du champ magnétique en $x = 0$ on obtient $\vec{K}_1 = \vec{B}_1$ d'où finalement

$$\boxed{\vec{B} = \vec{B}_1 e^{-x/\lambda}.}$$

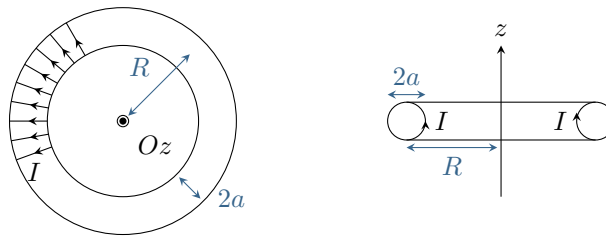


Figure 3 – Bobine torique.

4 Raisonons sur la figure 3 : le tore est supposé de rayon moyen R , sa section circulaire de rayon a , et il est bobiné par $N \gg 1$ spires réparties continûment. Soit M un point quelconque de l'espace.

• **Symétries** : le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ (plan de la figure de droite de l'énoncé) est un plan de symétrie de la distribution de courant, donc $\vec{B}(M)$ est orthogonal à ce plan.

$$\rightsquigarrow \vec{B}(M) = B(M) \vec{e}_\theta.$$

• **Invariances** : comme les spires sont supposées réparties continûment, alors la distribution de courant est invariante par rotation autour de l'axe Oz . Le champ $\vec{B}(M)$ ne dépend donc pas de θ , d'où

$$\vec{B}(M) = B(r, z) \vec{e}_\theta.$$

• **Théorème d'Ampère** :

▷ On raisonne sur un cercle passant par M et d'axe Oz , orienté par la règle de la main droite selon l'axe Oz .

▷ Circulation :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B(r, z) \vec{e}_\theta \cdot dl \vec{e}_\theta = 2\pi r B(r, z).$$

▷ Courant enlacé : en raisonnant sur les schémas on peut facilement comprendre que le courant enlacé vaut

$$I_{\text{enl}} = \begin{cases} NI & \text{si } M \in \text{tore} \\ 0 & \text{si } M \notin \text{tore} \end{cases}$$

Il faut toujours se méfier du signe des courants enlacés, par règle de la main droite avec l'orientation du contour : ici c'est positif.

▷ Conclusion : d'après le théorème d'Ampère,

$$2\pi r B(r, z) = \begin{cases} \mu_0 NI & \text{si } M \in \text{tore} \\ 0 & \text{si } M \notin \text{tore} \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \vec{B}(M) = \begin{cases} \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \vec{e}_\theta & \text{si } M \in \text{tore} \\ \vec{0} & \text{si } M \notin \text{tore} \end{cases}$$

Les lignes de champ sont donc des cercles.

Je ne suis pas sûr de comprendre la suite de la question ... Si l'on envoie des électrons au travers du tore, ils ne voient aucun champ magnétique et donc ne doivent pas être déviés par la force de Lorentz.

La suite de la question est complètement hors de portée d'un candidat en PT : l'expérience de Tonomura a permis de vérifier un effet de mécanique quantique appelé effet Aharonov-Bohm qui indique que même si le champ magnétique est nul les électrons ressentent son effet via le potentiel vecteur ... qui est hors programme en PT.

5 Le champ magnétique à l'intérieur du tore est donné par l'expression précédente. Le flux au travers d'une spire vaut

$$\varphi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi} \times a \times \int_R^{R+a} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 NI a}{2\pi} \ln \frac{R+a}{R}.$$

Le flux propre du tore est

$$\phi = N\varphi = \frac{\mu_0 N^2 I a}{2\pi} \ln \frac{R+a}{R}$$

et par définition $L = \phi/I$ d'où

$$L = \frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi} \ln \left(1 + \frac{a}{R} \right).$$

Exercice 7 : Émission radioactive

d'après divers oraux | 💡 2 | ✂ 2



▷ Équations de Maxwell.

1 L'amas émet des charges positives, il est donc logique que sa charge soit négative et décroissante. L'allure exponentielle est typique de la radioactivité. À l'instant initial, on a $q(t=0) = 0$: aucun atome ne s'est désintégré donc l'amas est neutre.

2 L'émission étant isotrope, le vecteur densité de courant est forcément à symétrie sphérique : $\vec{j} = j_r(r) \vec{e}_r$. Ainsi, tout plan contenant (OM) est plan de symétrie de la distribution de courant, donc $\vec{B}(M, t)$ doit être orthogonal à chacun de ces plans et est donc forcément nul :

$$\vec{B}(M, t) = \vec{0}.$$

Au delà de l'ARQS, l'équation de Maxwell-Ampère indique qu'un champ électrique variable est également source de champ magnétique : dans un cas plus général, il faut donc également étudier les plans de symétrie de $\partial \vec{E} / \partial t$. Cependant, d'après le théorème de superposition, les propriétés de symétrie doivent être vérifiées pour chaque « famille » de sources. Les symétries des courants imposent d'avoir $\vec{B} = \vec{0}$, le champ électrique ne pourra donc rien y changer.

3 • **Symétries** : la distribution de charge possède les mêmes symétries que la distribution de courant, mais comme \vec{E} doit être inclus dans un plan de symétrie il n'est pas nul mais radial,

$$\vec{E}(M, t) = E_r(M, t) \vec{e}_r.$$

L'équation de Maxwell-Faraday indique qu'un champ magnétique variable est également source de champ électrique : dans un cas plus général, il faut donc également étudier les plans de symétrie de $\partial \vec{B} / \partial t$... mais ce n'est pas la peine ici car $\vec{B} = \vec{0}$, tout se passe exactement comme en statique.

• **Invariances** : à tout instant la distribution de charge est invariante par rotation autour de l'amas, donc \vec{E} ne dépend que de r .

• **Théorème de Gauss**, qui s'applique aussi dans l'ARQS : on raisonne sur une sphère de rayon r centré sur l'amas.

▷ calcul du flux : $\oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = 4\pi r^2 E_r$.

▷ calcul de la charge intérieure : il faut un temps r/v_0 pour qu'une particule α sorte de la sphère de rayon r , donc la charge contenue dans la sphère à un instant t est la charge de l'amas à l'instant $t - r/v_0$.

$$Q_{\text{int}} = q \left(t - \frac{r}{v_0} \right)$$

• **Conclusion** :

$$\vec{E}(r, t) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \exp \left(-\frac{1}{\tau} \left(t - \frac{r}{v_0} \right) \right) \vec{e}_r.$$

4 D'après l'équation de Maxwell-Gauss,

$$\begin{aligned} \rho(r, t) &= \epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{Q_0}{4\pi} \frac{d}{dr} \left[\exp \left(-\frac{t}{\tau} + \frac{r}{v_0\tau} \right) \right] \\ &= \frac{Q_0}{4\pi r^2} \times \frac{1}{v_0\tau} \exp \left(-\frac{t}{\tau} + \frac{r}{v_0\tau} \right) \end{aligned}$$

$$\rho(r, t) = \frac{Q_0}{4\pi v_0\tau r^2} \exp \left(-\frac{t}{\tau} + \frac{r}{v_0\tau} \right)$$

D'après l'équation de Maxwell-Ampère,

$$\begin{aligned}\vec{j}(r,t) &= \frac{1}{\mu_0} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ &= \vec{0} - \frac{Q_0}{4\pi r^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\exp\left(-\frac{t}{\tau} + \frac{r}{v_0\tau}\right) \right] \vec{e}_r \\ &= -\frac{Q_0}{4\pi r^2} \times -\frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau} + \frac{r}{v_0\tau}\right) \vec{e}_r \\ \boxed{\vec{j}(r,t) &= \frac{Q_0}{4\pi \tau r^2} \exp\left(-\frac{t}{\tau} + \frac{r}{v_0\tau}\right) \vec{e}_r.}\end{aligned}$$

On retrouve $\vec{j} = \rho v_0 \vec{e}_r$... on aurait pu s'y attendre!

Exercice 8 : Rails de Laplace couplés

d'après oraux banque PT | 💡 2 | ✂ 2 | ⓧ

➤ Rails de Laplace;
➤ Bilan énergétique.

Utilisons les notations de la figure 4, et notons x_1 et x_2 les abscisses des deux barreaux, et v_1 et v_2 leurs vitesses algébriques.

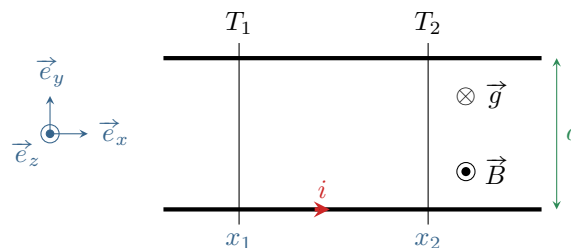


Figure 4 – Rails de Laplace couplés.

1 • **Équation électrique** : la surface du circuit est $a(x_2 - x_1)$ et le champ est uniforme, donc le flux magnétique vaut

$$\phi = a(x_2 - x_1) B$$

d'où on déduit la f.é.m. induite,

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -a(v_2 - v_1)B.$$

Le circuit équivalent contient deux résistances R montées en série, équivalentes à une unique résistance $2R$, et le générateur induit. La loi d'Ohm donne alors

$$e = 2Ri \quad \text{soit} \quad -a(v_2 - v_1)B = 2Ri.$$

• **Équations mécaniques** : les deux équations mécaniques s'obtiennent par application du théorème de la résultante cinétique aux deux tiges, en mouvement par rapport au référentiel du laboratoire, que l'on suppose galiléen. Ces tiges sont soumises à leur poids et à une force de réaction qui se compensent ainsi qu'à la force de Laplace. En orientant l'intensité comme sur la figure 4, la force de Laplace s'écrit

$$\vec{F}_1 = i(-a\vec{e}_y) \wedge (B\vec{e}_z) = -iaB\vec{e}_x \quad \text{et} \quad \vec{F}_2 = i(+a\vec{e}_y) \wedge (B\vec{e}_z) = iaB\vec{e}_x$$

Le TRC projeté sur \vec{e}_x donne alors

$$m \frac{dv_1}{dt} = -iaB \quad \text{et} \quad m \frac{dv_2}{dt} = +iaB.$$

• **Bilan** : en combinant avec l'équation électrique,

$$\begin{cases} m \frac{dv_1}{dt} = \frac{(aB)^2}{2R} (v_2 - v_1) \\ m \frac{dv_2}{dt} = -\frac{(aB)^2}{2R} (v_2 - v_1) \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \frac{dv_1}{dt} = \frac{1}{2\tau} (v_2 - v_1) \\ \frac{dv_2}{dt} = -\frac{1}{2\tau} (v_2 - v_1) \end{cases}$$

2 Sans indication, la question est un peu ardue ... Il faut découpler ces équations couplées en prenant la somme et la différence.

• **Différence** : posons $\delta = v_2 - v_1$. Des équations précédentes, on déduit

$$\frac{d\delta}{dt} + \frac{1}{\tau}\delta = 0$$

qui s'intègre en

$$\delta(t) = A e^{-t/\tau}.$$

À l'instant initial,

$$\delta(0) \underset{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{sol}}}{=} A \underset{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{CI}}}{=} v_2(0) - v_1(0) = -v_0$$

si bien que

$$\delta(t) = -v_0 e^{-t/\tau}.$$

• **Somme** : posons maintenant $\sigma = v_1 + v_2$. À partir du système d'équations couplées, il vient

$$\frac{d\sigma}{dt} = 0 \quad \text{d'où} \quad \sigma = \text{cte.}$$

La constante se détermine à l'instant initial,

$$\sigma = v_1(0) + v_2(0) = v_0.$$

• **Retour aux vitesses des barreaux** : en inversant,

$$v_1(t) = \frac{\sigma - \delta}{2} \quad \text{et} \quad v_2(t) = \frac{\sigma + \delta}{2}$$

soit

$$\boxed{v_1(t) = \frac{v_0}{2} (1 + e^{-t/\tau}) \quad \text{et} \quad v_2(t) = \frac{v_0}{2} (1 - e^{-t/\tau}) .}$$

3 Si la vitesse de la tige T_1 est imposée, c'est qu'elle est soumise à une force supplémentaire qui permet de la contrôler. Le TRC appliqué à T_1 est donc modifié par rapport aux questions précédentes. Raisonnons donc sur le TRC appliqué à T_2 traduit en représentation complexe,

$$j\omega v_2 = -\frac{1}{2\tau}(v_2 - v_1)$$

qui donne

$$(1 + 2j\tau\omega)v_2 = v_1.$$

On en déduit l'amplitude,

$$|v_2| = \frac{|v_1|}{\sqrt{1 + 4\tau^2\omega^2}} = \frac{V_0}{\sqrt{1 + 4\tau^2\omega^2}}$$

et le déphasage

$$\varphi = -\arg(1 + 2j\tau\omega) = -\arctan(2\tau\omega).$$

Ainsi,

$$\boxed{v_2(t) = \frac{V_0}{\sqrt{1 + 4\tau^2\omega^2}} \cos[\omega t - \arctan(2\tau\omega)] .}$$

4 Les équations mécaniques s'écrivent

$$m \frac{dv_1}{dt} = -iaB \quad \text{et} \quad m \frac{dv_2}{dt} = +iaB$$

donc en les multipliant respectivement par v_1 et v_2 on obtient

$$mv_1 \frac{dv_1}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_1^2 \right) = -iaB v_1 \quad \text{et} \quad mv_2 \frac{dv_2}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_2^2 \right) = +iaB v_2.$$

Prenons maintenant l'équation électrique, et multiplions-la par i ,

$$-a(v_2 - v_1)B = 2Ri \quad \text{soit} \quad -a(v_2 - v_1)Bi = 2Ri^2.$$

En combinant on en déduit

$$-\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv_2^2 \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv_1^2 \right) = 2Ri^2$$

ou encore

$$\underbrace{-\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv_1^2 \right)}_{\text{énergie cinétique perdue par 1}} = \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv_2^2 \right)}_{\text{énergie cinétique gagnée par 2}} + \underbrace{2Ri^2}_{\text{effet Joule}}.$$

Ainsi, l'énergie cinétique perdue par le barreau 1 est entièrement récupérée par le barreau 2 ou dissipée par effet Joule.

La méthode est générale et à retenir : pour obtenir le bilan énergétique en présence d'induction, il faut multiplier les équations électrique et mécanique par la bonne grandeur pour obtenir une puissance. Le TRC implique des forces, une puissance s'obtient en multipliant par la vitesse; la loi des mailles implique des tensions qu'il faut multiplier par l'intensité pour obtenir une puissance. Il reste ensuite à sommer les deux équations, ce qui a le bon goût d'éliminer le terme en champ magnétique, et interpréter le résultat.

Exercice 9 : Voile solaire

oral banque PT | 💡 2 | ✂️ 2



- ▷ Réflexion sur un conducteur parfait;
- ▷ Force de Lorentz.

1 Supposons que l'OPPM incidente se propage dans le sens des z croissants et qu'elle est polarisée selon (Ox) . Elle s'écrit alors

$$\vec{E}_i = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_x.$$

On cherche l'onde réfléchie sous la forme d'une OPPM se propageant en sens inverse et de polarisation a priori quelconque,

$$\vec{E}_r = \underline{E}_r e^{i(\omega t + kz)} \vec{e}_x + \underline{E}'_r e^{i(\omega t + kz)} \vec{e}_y.$$

Supposons la voile située en $z > 0$ et le vide en $z < 0$. La relation de passage en $z = 0$ donne

$$\vec{0} - \left[\vec{E}_i(z=0^-, t) + \vec{E}_r(z=0^-, t) \right] = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{e}_z.$$

En projection sur \vec{e}_y on obtient de façon immédiate

$$\underline{E}'_r = 0$$

et en projection sur \vec{e}_x on trouve

$$E_0 + \underline{E}_r = 0 \quad \text{d'où} \quad \underline{E}_r = -E_0.$$

Ainsi, l'onde réfléchie s'écrit

$$\vec{E}_r = -E_0 e^{i(\omega t + kz)} \vec{e}_x.$$

2 D'après la relation de structure, les champs magnétiques des ondes incidente et réfléchie s'écrivent respectivement

$$\begin{cases} \vec{B}_i = \vec{e}_z \wedge \frac{\vec{E}_i}{c} = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_y \\ \vec{B}_r = (-\vec{e}_z) \wedge \frac{\vec{E}_r}{c} = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t + kz)} \vec{e}_y \end{cases}$$

Le champ magnétique total en $z = 0^-$ vaut donc

$$\vec{B}(z=0^-, t) = \vec{B}_i(z=0^-, t) + \vec{B}_r(z=0^-, t) = \frac{2E_0}{c} e^{i\omega t} \vec{e}_y.$$

La relation de passage en $z = 0$ donne alors

$$\vec{j}_s = \vec{e}_z \wedge \frac{1}{\mu_0} \left(-\frac{2E_0}{c} e^{i\omega t} \vec{e}_y \right) \quad \text{soit} \quad \vec{j}_s = \frac{2E_0}{\mu_0 c} e^{i\omega t} \vec{e}_x.$$

3 La densité volumique de force de Lorentz en présence d'une densité volumique de courant \vec{j} s'écrit

$$\vec{f}_{\text{vol}} = \vec{j} \wedge \vec{B}.$$

Par analogie, la densité surfacique de force de Lorentz peut ici s'écrire

$$\vec{f}_{\text{surf}} = \vec{j}_s(t) \wedge \vec{B}(z=0, t).$$

Sa valeur moyenne vaut

$$\langle \vec{f}_{\text{surf}} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\vec{j}_s(t) \wedge \vec{B}^*(z=0, t) \right)$$

Rappelons que \vec{B}^* est le conjugué de \vec{B} .

Attention, l'expression de la force étant non linéaire il n'est pas possible de calculer sa valeur instantanée à partir des grandeurs complexes mais seulement sa valeur moyenne ... sans oublier ni la partie réelle ni le facteur 1/2. Pour obtenir la valeur instantanée, il n'y a pas d'autre possibilité que de revenir aux grandeurs réelles.

À partir des expressions précédentes,




$$\vec{j}_s(t) \wedge \vec{B}^*(z=0, t) = \frac{2E_0}{\mu_0 c} e^{i\omega t} \times \frac{2E_0}{c} e^{-i\omega t} (\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y) = \frac{4E_0^2}{\mu_0 c^2} \vec{e}_z.$$

Comme $\mu_0 c^2 = 1/\varepsilon_0$, on en déduit finalement

$$\langle \vec{f}_{\text{surf}} \rangle = 2\varepsilon_0 E_0^2 \vec{e}_z.$$

Elle est dirigée selon $+\vec{e}_z$, c'est-à-dire dans le sens de propagation du rayonnement solaire, comme on pouvait s'y attendre.

Exercice 10 : Guide d'ondes rectangulaire

exemple officiel banque PT |  2 |  3 | 



- ▷ Relation de dispersion ;
- ▷ Vecteur de Poynting.

1 L'onde proposée est **harmonique**, **progressive** dans le sens des z croissants ... mais elle n'est **pas plane**, car le champ électrique n'est pas uniforme dans un plan $z = \text{cte}$.

2 L'équation de d'Alembert s'écrit

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}.$$

3 Les dérivées du champ proposé s'écrivent

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} &= \frac{n\pi}{a} E_0 \cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x & \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} &= -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 E_0 \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x \\ \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} &= +k E_0 \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \sin(\omega t - kz) \vec{e}_x & \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} &= -k^2 E_0 \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x \\ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= -\omega E_0 \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \sin(\omega t - kz) \vec{e}_x & \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= -\omega^2 E_0 \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x \end{aligned}$$

En insérant ces expressions dans l'équation de d'Alembert, il vient

$$-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 E_0 \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kz) - k^2 E_0 \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kz) + \frac{\omega^2}{c^2} E_0 \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kz) = 0$$

ce qui se simplifie en

$$-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0.$$

Cette relation peut s'écrire sous la forme

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2.$$

La propagation n'est possible que si k est réel, donc $k^2 > 0$. On en déduit que le guide ne conduit l'onde que si la pulsation est telle que

$$\omega > \frac{n\pi c}{a}.$$

Il réalise donc un **filtrage passe-haut**.

4 D'après l'équation de Maxwell-Faraday,

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

avec pour l'onde étudiée

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} E_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ -\frac{\partial E_x}{\partial y} \end{bmatrix}$$

d'où

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = +kE_0 \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \sin(\omega t - kz) \vec{e}_y - \frac{n\pi}{a} E_0 \cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kz) \vec{e}_z$$

d'où on déduit par intégration

$$\vec{B} = \frac{k}{\omega} E_0 \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kz) \vec{e}_y + \frac{n\pi}{\omega a} E_0 \cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \sin(\omega t - kz) \vec{e}_z,$$

en choisissant nulle la constante d'intégration qui ne décrit pas un phénomène ondulatoire.

Rappelons que la relation de structure ne s'applique qu'aux ondes planes progressives ... mais ici l'onde n'est pas plane, il faut donc revenir à l'équation de Maxwell-Faraday pour calculer le champ magnétique.

Même chose pour la relation de dispersion : il faut renoncer à la tentation de remplacer k/ω par c comme on le ferait pour une OPPH!

On constate que \vec{B} n'est pas orthogonal à la direction de propagation : bien que l'onde se propage dans le vide, la présence du guide métallique modifie sa structure en profondeur. L'onde est ici qualifiée de « Transverse Électrique » (TE), par opposition aux ondes « Transverses Électro-Magnétique » (TEM) qui se propagent dans le vide illimité.

Le vecteur de Poynting est défini par

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}.$$

Ici, il a donc deux composantes sur \vec{e}_z et \vec{e}_y , avec

$$\Pi_z = \frac{1}{\mu_0} \times E_0 \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kz) \times \frac{k}{\omega} E_0 \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kz)$$

$$\Pi_z = \frac{k}{\mu_0 \omega} E_0^2 \sin^2\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cos^2(\omega t - kz).$$

La puissance moyenne transportée au travers d'une section du guide de normale \vec{e}_z vaut

$$\mathcal{P} = \iint_{\text{section}} \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{section}} \langle \Pi_z \rangle dS$$

avec ici

$$\langle \Pi_z \rangle = \frac{k}{2\mu_0 \omega} E_0^2 \sin^2\left(\frac{n\pi y}{a}\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \frac{k}{2\mu_0 \omega} E_0^2 \times \int_0^b dx \times \int_0^a \sin^2\left(\frac{n\pi y}{a}\right) dy \\ &= \frac{k}{2\mu_0 \omega} E_0^2 \times b \times \frac{a}{2} \end{aligned}$$

$$\mathcal{P} = \frac{k}{4\mu_0 \omega} E_0^2 S.$$

5 L'énoncé ne le dit pas clairement, mais on peut supposer que l'onde est émise dans le vide avant d'entrer dans le guide d'onde. Sa pulsation vaut donc

$$\omega = k_0 c = \frac{2\pi c}{\lambda}.$$

D'après la question 3, l'onde se propage si

$$\omega > \frac{n\pi c}{a} \quad \text{soit} \quad \frac{2\pi c}{\lambda} > \frac{1 \times \pi c}{3\lambda/4} = \frac{4}{3} \frac{\pi c}{\lambda}$$

ce qui est évidemment vrai. On en déduit que le mode $n = 1$ se propage dans le guide. On a alors

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{1 \times \pi}{a}\right)^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{4\pi}{3\lambda}\right)^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{4\pi \times \omega}{3 \times 2\pi c}\right)^2 = \left(1 - \frac{2^2}{3^2}\right) \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{5}{9} \frac{\omega^2}{c^2}$$

On en déduit

$$\frac{\omega}{k} = \frac{3c}{\sqrt{5}},$$

ce qui permet de déterminer (enfin!) l'amplitude E_0

$$E_0 = \sqrt{4\mu_0 \times \frac{3c}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{S} \times \mathcal{P}} = \sqrt{4\mu_0 \times \frac{3c}{\sqrt{5}} \times \frac{4}{\lambda^2} \times \mathcal{P}} = \frac{4}{\lambda} \sqrt{\frac{3}{\sqrt{5}} \mu_0 c \mathcal{P}}$$

Avec la relation de dispersion dans le vide, on trouve $\lambda = c/f = 3$ cm, et ainsi

$$E_0 = 2,3 \cdot 10^3 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}.$$