BLAISE PASCAL
PT 2020-2021

Préparation à l'oral *Correction*

Mécanique des fluides

Exercice 1 : Atmosphère adiabatique et polytropique

2 | 2 |

▷ *Relation de la statique des fluides dans un gaz ;*
▷ *Loi de Laplace.*

1 On lit $T_0 = 15\,°\mathrm{C}$ et $T(12\,\mathrm{km}) = -55\,°\mathrm{C}$ soit

$$\boxed{\delta_{\text{réel}} = -6 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{K \cdot m^{-1}}\,.}$$

2 Si les transformations sont aussi réversibles, alors d'après la loi de Laplace

$$\boxed{T^\gamma\, P^{1-\gamma} = \mathrm{cte}\,.}$$

3 Le logarithme de la loi de Laplace donne

$$\gamma \ln T + (1-\gamma) \ln P = \ln(\mathrm{cte})$$

donc en différenciant

$$\gamma \frac{\mathrm{d}T}{T} + (1-\gamma)\frac{\mathrm{d}P}{P} = 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}P}{P} = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{\mathrm{d}T}{T}\,.}$$

> *L'astuce qui consiste à passer par le logarithme puis à différencier sert dans beaucoup de contextes différents, et la retenir peut être utile.*

4 D'après la relation de la statique des fluides (z ascendant),

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho\, g \qquad \text{soit} \qquad \mathrm{d}P = -\rho\, g\, \mathrm{d}z = -\frac{M_{\text{air}} P}{RT} g\, \mathrm{d}z$$

d'après l'équation d'état. On en déduit par identification avec la question précédente

$$\frac{\mathrm{d}P}{P} = -\frac{M_{\text{air}}}{RT} g\, \mathrm{d}z = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{\mathrm{d}T}{T}$$

ce qui permet de conclure

$$\boxed{\delta_{\text{ad}} = \frac{M_{\text{air}} g (1-\gamma)}{R\gamma} = -10 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{K \cdot m^{-1}}\,.}$$

Le modèle adiabatique est évidemment meilleur que celui de l'atmosphère isotherme, car il prévoit un gradient de température non nul, indépendant de z, et du bon ordre de grandeur, mais l'accord des valeurs numériques est perfectible ... heureusement, la suite de l'exercice est là ☺

5 En réutilisant l'expression de la masse volumique, la relation donnée s'écrit

$$T^q P^{1-q} = \mathrm{cte}\,.$$

Ainsi, formellement, l'exposant polytropique q joue le rôle de γ dans les calculs, donc

$$\delta_{\text{poly}} = \frac{Mg(1-q)}{Rq} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{q = \frac{Mg}{Mg + R\,\delta_{\text{réel}}} \simeq 1{,}2\,.}$$

6 Le gradient de température δ est constant, on a donc tout simplement

$$\boxed{T = T_0 - \delta\, z\,.}$$

Pour déterminer la pression, on utilise de nouveau la correspondance $q \leftrightarrow \gamma$, d'où

$$P(z) = P_0 \left(\frac{T(z)}{T_0}\right)^{q/(q-1)} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{P(z) = P_0 \left(1 - \frac{\delta z}{T_0}\right)^{q/(q-1)}\,.}$$

7 En prenant $T_0 = 288\,\mathrm{K}$ on trouve $T = 231\,\mathrm{K} = -42\,°\mathrm{C}$ et $P = 0{,}27\,\mathrm{bar}$.

Exercice 2 : Force de pression sur un tube à essais — oral banque PT | 2 | 2

- *Relation de l'hydrostatique ;*
- *Résultante des forces de pression ;*
- *Intégration par découpage mésoscopique.*

1 Comme l'axe (Oz) est orienté vers le bas, alors le champ de pression hydrostatique dans un fluide incompressible s'écrit

$$P(z) = -\rho g z + A \qquad \text{avec} \qquad A = \text{cte}\,.$$

En notant P_0 la pression atmosphérique,

$$P(z{=}H) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CL}}}{=} P_0 \underset{\substack{\uparrow\\ \text{expr}}}{=} -\rho g H + A \qquad \text{d'où} \qquad A = P_0 + \rho g H\,,$$

d'où on conclut

$$\boxed{P(z) = P_0 + \rho g (H - z)\,.}$$

2 La force de pression subie par une surface élémentaire du tube centrée sur un point M est dirigée selon la normale sortante au tube et ne dépend que de la profondeur z du point M. On raisonne sur la figure 1.

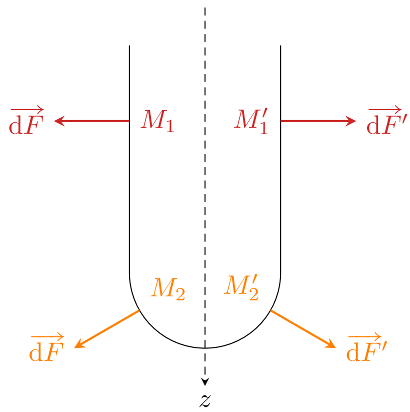

Figure 1 – Direction des forces de pression au sein du tube à essais.

• **Portion cylindrique :** raisonnons temporairement en coordonnées **cylindriques**. La force de pression est en tout point M dirigée par $\vec{e}_r$. Ainsi, pour deux points M_1 et M_1' situés à la surface du tube à une même profondeur z mais à deux angles θ et $\theta' = \theta + \pi$, la force a même norme mais sens opposé. Ce raisonnement étant valable pour chaque point de la surface du tube, on en déduit que la résultante des forces de pression sur la portion cylindrique est nulle.

• **Portion hémisphérique :** raisonnons maintenant en coordonnées **sphériques**, ce qui change la définition de l'angle θ. La force de pression est en tout point M encore une fois dirigée par $\vec{e}_r$ ... mais comme le système de coordonnées n'est plus le même, ce n'est plus le même vecteur. Ainsi, pour deux points M_2 et M_2' situés à la surface du tube à une même profondeur z mais à deux angles φ et $\varphi' = \varphi + \pi$, il y a une compensation des composantes horizontales, alors que les composantes verticales (selon $\vec{e}_z$) s'ajoutent. Ce raisonnement étant valable pour chaque point de la surface du tube, on en déduit que la résultante des forces de pression sur la portion hémisphérique est dirigée selon $\vec{e}_z$.

- **Conclusion :** la résultante des forces de pression subie par le tube est dirigée selon $\vec{e}_z$.

3 Il est suffisant de s'intéresser au fond du tube en raisonnant en coordonnées sphériques. Une élément de surface $\mathrm{d}S$ de normale $\vec{e}_r$ subit la force pressante exercée par l'eau, de pression $P(z)$, et la force pressante exercée par l'air, de pression uniforme P_0 et de sens opposé à la précédente. Ainsi,

$$\overrightarrow{\mathrm{d}F} = (P(z) - P_0)\,\mathrm{d}S\,\vec{e}_r$$

d'où on déduit

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}F_z &= (P(z) - P_0)\,\mathrm{d}S\,\vec{e}_r \cdot \vec{e}_z \\
&= \rho g(H - z)\,\cos\theta\,\mathrm{d}S \\
&= \rho g(H - R\cos\theta)\cos\theta\,\mathrm{d}S
\end{aligned}$$

Cette force est uniforme en tout point d'une couronne sphérique comprise entre les angles θ et $\theta + \mathrm{d}\theta$. La résultante sur cette couronne, dont la surface $\mathrm{d}S_\mathrm{c}$ est donnée, vaut donc

$$\mathrm{d}F_{z,\mathrm{c}} = \rho g(H - R\cos\theta)\cos\theta\,\mathrm{d}S_\mathrm{c} = \rho g(H - R\cos\theta)\cos\theta \times 2\pi R^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

En sommant ces forces pour chacune des couronnes élémentaires, θ allant de 0 à $\pi/2$, on en déduit

$$\begin{aligned}
F_z &= 2\pi R^2 \rho g \int_0^{\pi/2} (H - R\cos\theta)\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi R^2 H \rho g \int_0^{\pi/2} \cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta - 2\pi R^3 \rho g \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi R^2 H\rho g \times \left(-\frac{-1}{4} + \frac{1}{4}\right) - 2\pi R^3 \rho g \left(-\frac{0^3}{3} + \frac{1^3}{3}\right) \\
&= \pi R^2 H \rho g - \frac{2\pi}{3} R^3 \rho g \\
F_z &= \pi R^2 \rho g \left(H - \frac{2}{3}R\right)
\end{aligned}$$

ce qui conduit en fin de compte à

$$\boxed{\vec{F} = \pi R^2 \rho g \left(H - \frac{2}{3}R\right) \vec{e}_z\,.}$$

On constate que la force subie par le tube est la même que s'il avait un fond plat sous une hauteur d'eau $H - 2R/3$.

Exercice 3 : Plaque pivotante — oral banque PT | 3 | 2

- ▷ *Lien entre mécanique des fluides et des solides.*
- ▷ *Résultante des forces de pression.*
- ▷ *Moment cinétique.*

1 La pression est donnée par la loi de l'hydrostatique, qui s'écrit ici

$$P(y) = K - \rho g y$$

car l'axe (Oy) est ascendant. La constante se détermine à la surface libre,

$$P(y{=}h) \underbrace{=}_{\text{sol}} K - \rho g h \underbrace{=}_{\text{CL}} P_0 \qquad \text{d'où} \qquad K = P_0 + \rho g h$$

et ainsi

$$\boxed{P(y) = P_0 + \rho g(h - y)\,.}$$

2 La pression dans l'eau sur la plaque horizontale est uniforme et vaut

$$\boxed{P_\mathrm{h} = P(y{=}0) = P_0 + \rho g h\,.}$$

Elle vaut simplement P_0 côté air. La résultant des forces de pression s'en déduit directement

$$\vec{F}_\mathrm{h} = -P_\mathrm{h}\, ab\, \vec{e}_y + P_0\, ab\, \vec{e}_y \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\vec{F}_\mathrm{h} = -\rho g h\, ab\, \vec{e}_y\,.}$$

Pour calculer le moment, on procède par découpage mésoscopique : on décompose la plaque horizontale en fines bandes de largeur dx et de longueur b dans la direction z. La force pressante sur chacune de ces bandes vaut

$$\mathrm{d}\vec{F}_\mathrm{h} = -\rho g h\, b\, \mathrm{d}x\, \vec{e}_y$$

et son bras de levier autour de l'axe (Oz) est simplement égal à l'abscisse x de la bande, d'où un moment résultant

$$\mathrm{d}\mathcal{M}_\mathrm{h} = -x \times \rho g h\, b\, \mathrm{d}x$$

avec un signe $-$ car la force tend à faire tourner les plaques dans le sens horaire autour de l'axe Oz. Le moment résultant s'obtient par sommation,

$$\mathcal{M}_\mathrm{h} = \int_0^a -x\rho g h b\, \mathrm{d}x = -\rho g h b \int_0^a x \mathrm{d}x = -\rho g h b \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a$$

et ainsi

$$\boxed{\mathcal{M}_\mathrm{h} = -\rho g h \frac{ba^2}{2}\,.}$$

> *Le résultat est ici identique à celui qu'on aurait obtenu en considérant que la force $\vec{F}_h$ était appliquée au centre de la plaque. Cela est dû au fait que la pression est uniforme sur la plaque.*

3 La pression sur la plaque horizontale est toujours uniformément égale à P_0 côté air, mais elle n'est plus uniforme côté eau. Une bande verticale de plaque de hauteur dy située entre y et $y + \mathrm{d}y$ subit une force pressante égale à

$$\mathrm{d}\vec{F}_\mathrm{v} = -\left[P_0 + \rho g(h-y)\right] b\, \mathrm{d}y\, \vec{e}_x + P_0\, b\, \mathrm{d}y\, \vec{e}_x = \rho g (y-h) b \mathrm{d}y\, \vec{e}_x\,.$$

La résultante vaut donc

$$\vec{F}_\mathrm{v} = \int_0^h \rho g (y-h) b \mathrm{d}y\, \vec{e}_x = \rho g b \left[\frac{y^2}{2} - hy\right]_0^h \vec{e}_x = \rho g b \left(\frac{h^2}{2} - h^2\right) \vec{e}_x$$

soit

$$\boxed{\vec{F}_\mathrm{v} = -\rho g b \frac{h^2}{2} \vec{e}_x\,.}$$

Le bras de levier de la force élémentaire $\mathrm{d}\vec{F}_\mathrm{v}$ par rapport à l'axe (Oz) est égal à y, et comme cette force tend à faire tourner la plaque dans le sens trigonométrique alors son moment vaut

$$\mathrm{d}\mathcal{M}_\mathrm{v} = +y \times \rho g (h-y) b \mathrm{d}y, .$$

> *Attention aux signes : dans le calcul du moment avec le bras de levier, c'est la norme de la force qui intervient, et ici $h > y$.*

Le moment résultant vaut

$$\mathcal{M}_\mathrm{v} = \int_0^h y \rho g (h-y) b \mathrm{d}y = \rho g b \int_0^h y(h-y) \mathrm{d}y = \rho g b \left[\frac{hy^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^h = \rho g b \left(\frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{3}\right)$$

ce qui donne finalement

$$\boxed{\mathcal{M}_\mathrm{v} = \rho g b \frac{h^3}{6}\,.}$$

4 Il y a basculement de la plaque dès lors que le moment total des forces de pression autour de (Oz) $\mathcal{M}_\mathrm{h} + \mathcal{M}_\mathrm{v}$ est positif ou nul, c'est-à-dire

$$-\rho g h \frac{ba^2}{2} + \rho g b \frac{h^3}{6} \geq 0 \qquad \text{soit} \qquad -\frac{a^2}{2} + \frac{h^2}{6} \geq 0$$

et on en déduit la condition de basculement

$$\boxed{h \geq h_0 = a\sqrt{3}\,.}$$

Exercice 4 : Déplacement d'un piston à huile

oral banque PT | 3 | 2

▷ *Débit volumique ;*
▷ *Force de viscosité ;*
▷ *Lien entre mécanique des fluides et des solides.*

1 L'estimation la plus simple est

$$\boxed{\mathrm{GP} = \frac{P_2 - P_1}{h} = \frac{P_1}{h}\,.}$$

2 La section au travers laquelle s'écoule le fluide est une couronne circulaire (un anneau) compris entre les rayons R_1 et R_2. Elle a pour surface $S = \pi {R_2}^2 - \pi {R_1}^2$. Le débit volumique vaut donc

$$\boxed{D_V = v_\mathrm{d} S = \pi\alpha\frac{P_1}{h}({R_2}^2 - {R_1}^2)\,.}$$

3 Raisonnons en coordonnées cylindriques. La force surfacique de viscosité subie par le cylindre intérieur a pour norme

$$F_\mathrm{surf} = \eta\left.\frac{\partial v}{\partial r}\right|_{r=R_1}\,.$$

Compte tenu des données à disposition, on peut approximer que l'ordre de grandeur de la vitesse dans l'interstice est v_d et que cette vitesse change sur une distance $R_2 - R_1$. Ainsi, en ordre de grandeur,

$$\left.\frac{\partial v}{\partial r}\right|_{r=R_1} \simeq \frac{v_\mathrm{d}}{R_2 - R_1} = \frac{\alpha P_1}{\eta h(R_2 - R_1)} \qquad \text{soit} \qquad F_\mathrm{surf} \simeq \frac{\alpha P_1}{h(R_2 - R_1)}\,.$$

En supposant que cette force surfacique est la même sur tout le cylindre, il vient

$$F_\mathrm{visq} = 2\pi R_1 h \times F_\mathrm{surf} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{F_\mathrm{visq} = \frac{2\pi R_1 \alpha P_1}{R_2 - R_1}\,.}$$

4 Notons $\overrightarrow{u}$ le vecteur unitaire orienté de la gauche vers la droite de la figure. Le piston est soumis
▷ à la force $\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{u}$ exercée par l'opérateur ;
▷ à la force visqueuse $\overrightarrow{F}_\mathrm{visq} = -F_\mathrm{visq}\overrightarrow{u}$, orientée vers la gauche car le piston se déplace vers la droite ;
▷ à la force pressante $\overrightarrow{F}_\mathrm{p} = (P_1 - P_2)\pi {R_1}^2\overrightarrow{u} = -P_1\pi {R_1}^2\overrightarrow{u}$.

Comme le mouvement du piston est qualifié de quasi-statique, on peut considérer que ces forces se compensent, d'où

$$F - \frac{2\pi R_1\alpha P_1}{R_2 - R_1} - P_1\pi {R_1}^2 = 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{F = \frac{2\pi R_1\alpha P_1}{R_2 - R_1} + P_1\pi {R_1}^2\,.}$$

Exercice 5 : Résistance hydraulique d'une conduite

2 | 2

▷ *Débit volumique.*

1 Comme toujours avec ce genre d'équation, on ne développe surtout pas la dérivée mais on procède par intégrations successives. On réécrit et on procède à la première intégration,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right) = -\frac{\Delta P}{\eta L}r \qquad \text{d'où} \qquad r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = -\frac{\Delta P}{\eta L}\frac{r^2}{2} + A$$

où A est une constante. De même,

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = -\frac{\Delta P}{\eta L}\frac{r}{2} + \frac{A}{r} \qquad \text{d'où} \qquad v(r) = -\frac{\Delta P}{\eta L}\frac{r^2}{4} + A\ln r + B$$

avec B une constante également. Or il est clair que la vitesse ne diverge pas au centre de la conduite, donc $A = 0$. Le fluide étant visqueux, sa vitesse est nulle au contact d'une paroi fixe, donc

$$v(r=R) \underset{\mathrm{CL}}{\underset{\uparrow}{=}} 0 \underset{\mathrm{sol}}{\underset{\uparrow}{=}} -\frac{\Delta P}{4\eta L}R^2 + B$$

d'où on déduit

$$\boxed{v(r) = \frac{\Delta P}{4\eta L}(R^2 - r^2)\,.}$$

Le profil de vitesse est parabolique, maximal au centre de la conduite et nul sur les parois.

2 On considère une section $\mathcal{S}$ de normale $\overrightarrow{e}_z$. L'élément de surface en coordonnées cylindriques s'écrit $\mathrm{d}S = \mathrm{d}r \times r\,\mathrm{d}\theta$. Le débit volumique s'écrit donc

$$\begin{aligned}
D_\mathrm{v} &= \iint_\mathcal{S} \frac{\Delta P}{4\eta L}(R^2 - r^2) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\Delta P}{4\eta L} \times \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \times \int_0^R (R^2 - r^2) r\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{\Delta P}{4\eta L} \times 2\pi \times \left[\frac{R^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^R \\
&= \frac{\pi\,\Delta P}{2\eta L} \times R^4 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{D_\mathrm{v} = \frac{\pi R^4}{8\eta L}\Delta P\,.}$$

3 Par analogie avec une résistance électrique, ΔP est l'analogue de $U = \Delta V$ et le débit volumique est l'analogue de l'intensité, qui n'est autre qu'un débit de charge. La différence de pression entraîne l'apparition d'un débit volumique, de même qu'une tension appliquée à une résistance entraîne l'apparition d'un courant. On peut également faire l'analogie avec la résistance thermique : une différence de température entraîne l'apparition d'un flux thermique.

> *Tous ces phénomènes qui se décrivent avec un formalisme voisin sont appelés « phénomènes de transport ». Ils recouvrent entre autres le transport de charges électriques, le transport de masse par un fluide, la diffusion thermique, ou encore la diffusion de matière (pas au programme de PT).*

À partir de l'expression précédente, il vient directement

$$\boxed{R_\mathrm{H} = \frac{8\eta L}{\pi R^4}\,.}$$

4 La résistance hydraulique de la conduite de section $2S$ s'obtient directement à partir de l'expression précédente, et vaut

$$R_\mathrm{H} = \frac{8\eta L}{\pi (2S)^2} = \frac{2\eta L}{\pi S^2}\,.$$

Si les conduites sont placées en parallèle, alors la résistance hydraulique équivalente s'obtient par somme des inverses (les débits s'ajoutent mais ΔP est le même pour les deux conduites), ainsi

$$\frac{1}{R'_\mathrm{H}} = \frac{\pi S^2}{8\eta L} + \frac{\pi S^2}{8\eta L} = \frac{\pi S^2}{4\eta L} \qquad \text{d'où} \qquad R'_\mathrm{H} = \frac{4\eta L}{\pi S^2}\,.$$

Par définition de la résistance hydraulique, comme le débit volumique est le même dans les deux installations,

$$D_\mathrm{v} = \frac{\Delta P}{R_\mathrm{H}} = \frac{\Delta P'}{R'_\mathrm{H}} \qquad \text{soit} \qquad \frac{\Delta P'}{\Delta P} = \frac{R'_\mathrm{H}}{R_\mathrm{H}} = 2\,.$$

Par conséquent, utiliser **une seule conduite de grande section** permet d'obtenir le même débit pour une surpression imposée plus faible.

> *Qualitativement, cela s'explique par les forces visqueuses au niveau des parois : la surface des parois est plus faible dans la conduite de grande section, ce qui diminue d'autant les pertes énergétiques.*

Exercice 6 : Vase de Mariotte — oral banque PT | 2 | 3

- ▷ *Écoulement parfait ;*
- ▷ *Conservation de la masse ;*
- ▷ *Intégration par séparation de variables.*

1 Entre deux points A et B situés sur une même ligne de courant d'un écoulement parfait, stationnaire, incompressible et homogène, il y a conservation de la charge hydraulique

$$\frac{P_A}{\rho} + \frac{v_A^2}{2} + gz_A = \frac{P_B}{\rho} + \frac{v_B^2}{2} + gz_B\,.$$

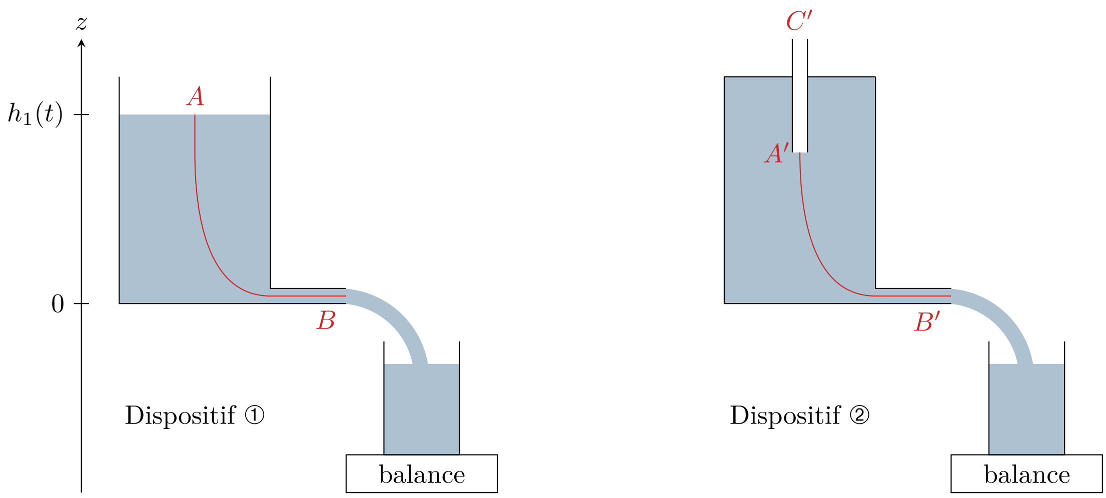

Figure 2 – Lignes de courant et notations utiles.

2 Notons $h_1(t)$ la hauteur d'eau à l'instant t dans le réservoir. Raisonnons sur la ligne de courant AB de la figure 2. D'après la relation de Bernoulli,

$$\frac{P_0}{\rho} + \frac{v_A^2}{2} + gh_1 = \frac{P_0}{\rho} + \frac{v_B^2}{2} + 0\,.$$

L'écoulement étant incompressible,

$$v_A S = v_B s \qquad \text{soit} \qquad v_A = \frac{s}{S} v_B \ll 1$$

ce qui permet de simplifier la relation précédente et d'obtenir

$$v_B = \sqrt{2gh_1}\,,$$

ce qui donne un débit

$$\boxed{D_1 = s\sqrt{2gh_1}\,.}$$

Un bilan de masse pour le bécher entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$ donne

$$m_1(t + \mathrm{d}t) = m_1(t) + \rho D_1\,\mathrm{d}t \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\mathrm{d}m_1}{\mathrm{d}t} = \rho s\sqrt{2gh_1}\,.$$

De plus, la conservation de la masse totale de fluide donne

$$\rho HS = \rho h_1 S + m_1 \qquad \text{d'où} \qquad h_1 = H - \frac{m_1}{\rho S}$$

Le plus simple est de résoudre d'abord l'équation différentielle sur h_1 puis d'en déduire la masse $m_1(t)$ qui s'est écoulée. L'équation différentielle s'écrit

$$-\rho S\frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t} = \rho s\sqrt{2gh_1} \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t} = -\frac{s}{S}\sqrt{2gh_1}\,.$$

Cette équation se résout par séparation des variables :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}h_1}{\sqrt{2gh_1}} &= -\frac{s}{S}\mathrm{d}t \\
2 \times \frac{1}{2g}\int_H^{h_1(t)} \frac{2g\,\mathrm{d}h_1}{2\sqrt{2gh_1}} &= -\frac{s}{S}\int_0^t \mathrm{d}t \\
\frac{1}{g}\left[\sqrt{2gh_1}\right]_H^{h_1(t)} &= -\frac{s}{S}t \\
\sqrt{2gh_1} - \sqrt{2gH} &= -\frac{s}{S}gt \\
\sqrt{h_1} &= \sqrt{H} - \frac{s}{S}\sqrt{\frac{g}{2}}t \\
h_1(t) &= H - \frac{s}{S}\sqrt{2gH}t + \frac{s^2}{S^2}\frac{g}{2}t^2
\end{aligned}$$

ce qui permet d'en déduire la masse,

$$m_1 = \rho S(H - h_1) \qquad \text{soit} \qquad m_1(t) = \rho S \times \left(\frac{s}{S}\sqrt{2gH}t - \frac{s^2}{S^2}\frac{g}{2}t^2\right)$$

et enfin

$$\boxed{m_1(t) = \rho s\sqrt{2gH}t - \frac{\rho s^2}{S}\frac{g}{2}t^2\,.}$$

3 Qualitativement, de l'air peut toujours pénétrer dans le haut du réservoir si bien que l'eau continue à s'écouler en étant remplacée par l'air qui entre par le tuyau. D'après la relation de Bernoulli appliquée entre le haut (point C') et le bas de l'arrivée d'air (point A'), sachant que la conservation du débit d'air impose $v_{A'} = v_{C'}$:

$$\frac{P_\mathrm{atm}}{\rho_\mathrm{air}} + gz_{C'} = \frac{P_{A'}}{\rho_\mathrm{air}} + gz_{A'} \qquad \text{soit} \qquad P_{A'} = P_\mathrm{atm} + \rho_\mathrm{air}g(z_{C'} - z_{A'})\,.$$

Sachant que $\rho_\mathrm{air} \sim 1\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, pour $z_{C'} - z_{A'} \sim 10\,\mathrm{cm}$, on a $\rho_\mathrm{air}g(z_{C'} - z_{A'}) \sim 1\,\mathrm{Pa}$, ce qui est négligeable devant $P_\mathrm{atm} = 10^5\,\mathrm{Pa}$.

4 Notons $z_{A'} = h_0$. En appliquant la relation de Bernoulli sur la ligne de courant $A'B'$, et en la simplifiant comme à la question précédente, on obtient

$$D_2 = s\sqrt{2gh_0} = \mathrm{cte} \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\mathrm{d}m_2}{\mathrm{d}t} = \rho s\sqrt{2gh_0}$$

et une intégration qui est, cette fois-ci, immédiate donne

$$\boxed{m_2(t) = \underbrace{\rho s\sqrt{2gh_0}}_{=a}\,t\,.}$$

5 Lorsque le bas de l'arrivée d'air est émergée, la ligne de courant $A'B'$ n'existe plus et le raisonnement précédent n'est plus valide. La situation devient analogue au dispositif ①, où c'est la surface libre de l'eau qui est à la pression atmosphérique, et on retrouve une évolution de la masse contenue dans le bécher du même type que $m_1(t)$.

Exercice 7 : Cavitation dans une conduite forcée

inspiré oral banque PT | 2 | 2 |

- *Pertes de charge ;*
- *Puissance indiquée.*

1 La retenue d'eau est de surface très supérieure à celle de la conduite forcée, si bien que la vitesse de l'eau y est négligeable. Appliquons le théorème de Bernoulli entre la surface libre de la retenue et la sortie de la conduite, où la pression est égale à la pression atmosphérique P_0 :

$$\frac{P_0}{\rho} + \frac{0^2}{2} + gH = \frac{P_0}{\rho} + \frac{v^2}{2} + 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{v = \sqrt{2gH}\,.}$$

On retrouve sans surprise la relation de Torricelli, qui est valable quelle que soit la géométrie du système tant que le fluide part et arrive à pression atmosphérique et que les pertes de charges sont négligées.

2 Appliquons maintenant le théorème de Bernoulli entre une hauteur z dans la conduite et sa sortie. Comme l'injecteur est négligé, la conservation du débit volumique indique que la vitesse est identique aux deux points considérés.

$$\frac{P(z)}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = \frac{P_0}{\rho} + \frac{v^2}{2} + 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{P(z) = P_0 - \rho g z\,.}$$

Il y a cavitation si $P(z) < P_{\mathrm{sat}}$, donc pour z tel que

$$P_0 - \rho g z < P_{\mathrm{sat}} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{z > \frac{P_0 - P_{\mathrm{sat}}}{\rho g} = 10\,\mathrm{m}\,.}$$

Comme la retenue d'eau se retrouve 95 m au dessus de la sortie de la conduite, **il y a très probablement cavitation**, ce qui nuit au bon fonctionnement de l'installation.

En réalité, tout dépend de la valeur de H_0, mais il est très peu probable, pour ne pas dire impossible, que l'entrée de la conduite forcée se trouve plus de 85 m sous la surface libre !

Attention, le relation obtenue pour $P(z)$ est valable seulement au sein de la conduite, mais pas dans la retenue d'eau : en effet, il n'y a pas d'écoulement donc pas de simplification des vitesses. Dans la retenue, le profil de pression est hydrostatique : $P = P_0 - \rho g(z - H)$. On peut ainsi constater qu'il y a discontinuité de pression à l'entrée de la conduite, ce qui est logique compte tenu de la mise en écoulement.

3 Notons v' la vitesse en sortie de l'injecteur. Par conservation du débit volumique, entre l'entrée et la sortie de l'injecteur,

$$v\,\frac{\pi D^2}{4} = v'\,\frac{\pi d^2}{4} \qquad \text{soit} \qquad \frac{v}{v'} = \frac{d^2}{D^2}\,.$$

La relation de Bernoulli appliquée entre l'entrée et la sortie de l'injecteur, tous les deux situées à l'altitude $z = 0$, donne alors

$$\frac{P_{\mathrm{e}}}{\rho} + \frac{v^2}{2} + 0 = \frac{P_{\mathrm{s}}}{\rho} + \frac{v'^2}{2} + 0 \qquad \text{soit} \qquad P_{\mathrm{e}} = P_{\mathrm{s}} + \frac{1}{2}\rho\left(v'^2 - v^2\right)$$

On en déduit

$$P_{\mathrm{e}} = P_{\mathrm{s}} + \frac{1}{2}\rho v'^2\left(1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right) > P_{\mathrm{s}}$$

La pression en entrée de l'injecteur est inférieure à la pression en sortie. Le calcul de la question 2 est toujours valable, à condition de remplacer P_0 par P_{e}, ce qui donne

$$P(z) = P_{\mathrm{e}} - \rho g z\,.$$

La vitesse de sortie vaut toujours $v' = \sqrt{2gH}$, donc

$$P(z) = P_0 + \rho g H\left(1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right) - \rho g z\,.$$

La condition de cavitation devient

$$z > \frac{P_0 + \rho g H\left(1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right) - P_{\mathrm{sat}}}{\rho g} = 105\,\mathrm{m}\,.$$

Ainsi, l'injecteur empêche comme prévu le phénomène de cavitation.

Pour aller plus vite dans le calcul, on peut remarquer que $(d/D)^4 \ll 1$ et négliger ce terme. On obtient alors comme condition de non-cavitation

$$z > \frac{P_0 - P_{\mathrm{sat}}}{\rho g} + H > H$$

ce qui permet de conclure directement.

4 Connaître le débit de sortie Q permet d'en déduire la vitesse réelle en sortie de l'injecteur,

$$v_{\mathrm{s}} = \frac{Q/4}{\pi d^2/4} = \frac{Q}{\pi d^2}\,.$$

Le théorème de Bernoulli appliqué entre la surface libre de la retenue d'eau et la sortie de l'injecteur, prenant en compte les pertes de charge sous forme d'une hauteur $h^\star$, donne

$$\underbrace{\left(\frac{\cancel{P_0}}{\cancel{\rho}} + \frac{{v_\mathrm{s}}^2}{2} + 0\right)}_{\text{sortie}} - \underbrace{\left(\frac{\cancel{P_0}}{\cancel{\rho}} + \frac{0^2}{2} + gH\right)}_{\text{entrée}} = -gh^\star\,,$$

ce qui donne

$$\boxed{h^\star = H - \frac{{v_\mathrm{s}}^2}{2g} = 10\,\mathrm{m}\,.}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ Appliquons encore une fois le théorème de Bernoulli, cette fois entre l'entrée et la sortie de la turbine, avec un débit massique total ρQ et en tenant compte de la puissance $\mathcal{P}$ cédée par le fluide à la turbine,

$$\rho\,Q\left[\underbrace{\left(\frac{\cancel{P_0}}{\cancel{\rho}} + \frac{0^2}{2} + 0\right)}_{\text{sortie}} - \underbrace{\left(\frac{\cancel{P_0}}{\cancel{\rho}} + \frac{{v_\mathrm{s}}^2}{2} + 0\right)}_{\text{entrée}}\right] = -\mathcal{P}$$

d'où on déduit

$$\boxed{\mathcal{P} = \frac{\rho Q {v_\mathrm{s}}^2}{2} = \frac{\rho Q^3}{2\pi^2 d^4} = 66\,\mathrm{kW}\,.}$$