Préparation à l'oral — *Correction*

Problèmes ouverts (3)

Exercice 1 : Antenne cadre

oral banque PT | 2 | 1

▷ *Problème ouvert.*

L'antenne fonctionne sur le principe de l'induction, la tension mesurée à ses bornes étant reliée à la dérivée du flux magnétique au travers de l'antenne. Notons le champ électrique de l'onde sous la forme

$$\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(\omega t - kx)\,\vec{e}_y\,,$$

d'où on déduit le champ magnétique par la relation de structure

$$\vec{B}(x,t) = \frac{E_0}{c}\cos(\omega t - kx)\,\vec{e}_z\,.$$

On en déduit que, d'après cette modélisation, l'antenne doit être placée perpendiculairement au champ magnétique, donc coplanaire avec la direction de propagation de l'onde. Pour la fréquence étudiée, la longueur d'onde vaut

$$\lambda = \frac{c}{f} \simeq \frac{3\cdot 10^8}{3\cdot 10^6} = 100\,\mathrm{m}$$

On peut donc supposer $\lambda \gg a, b$, donc $x = x_0 = $ cte sur toute la surface de l'antenne, si bien que le champ magnétique est uniforme à l'échelle de l'antenne. Le flux magnétique au travers de l'antenne vaut donc

$$\phi = \iint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{E_0}{c}ab\cos(\omega t - kx_0)$$

d'où on déduit la fém induite

$$e = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = +\frac{E_0}{c}\,ab\,\omega\sin(\omega t - kx_0)\,.$$

La valeur efficace de cette tension est donc

$$U_{\text{eff}} = \frac{E_0\,ab\,\omega}{c\sqrt{2}}$$

d'où on déduit

$$\boxed{E_0 = \frac{c\sqrt{2}}{ab\,\omega}U_{\text{eff}}\,.}$$

Exercice 2 : Rail gun

adapté oral Centrale PSI | 3 | 2

▷ *Problème ouvert.*

> *Voir ici :* `http://www.liberation.fr/planete/2010/12/17/le-railgun-le-giga-canon-de-la-navy_701446`

Raisonnons par analogie avec les rails de Laplace en négligeant tous les frottements. Les notations sont présentées figure 1.

Le champ susceptible de mettre en mouvement le projectile est nécessairement le champ créé par le circuit lui-même. Pour faire simple, on néglige les phénomènes d'induction : on considère que le courant est constamment égal au courant maximal que la source peut délivrer. Le champ créé par un rail peut être modélisé par celui d'un fil infini, parcouru par un courant d'intensité I :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{u}_\theta$$

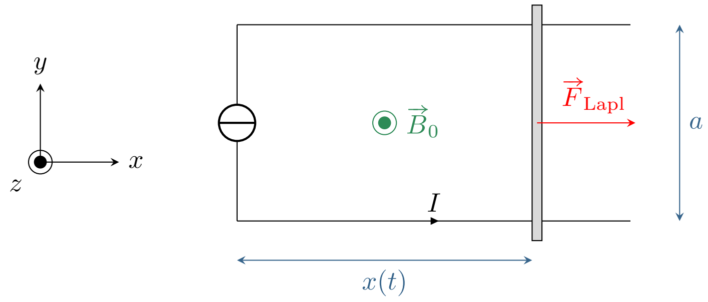

Figure 1 – Notations pour l'étude du rail gun.

(se retrouve en 30 secondes avec le théorème d'Ampère). Pour estimer le champ total, faisons l'hypothèse qu'il est uniforme sur le projectile, et calculons sa valeur en $y = a/2$. Les champs créés par les deux rails se superposent, et compte des orientations sont dirigés tous les deux selon $+\vec{u}_z$, si bien que

$$\vec{B} = 2 \times \frac{\mu_0 I}{2\pi\, a/2} \vec{u}_z = \frac{2\mu_0 I}{\pi a} \vec{u}_z \,.$$

Numériquement, on trouve $B \simeq 8\,\mathrm{T}$.

Une fois ce champ déterminé, calculons la vitesse de sortie. Plus précisément, on ne s'intéresse qu'à la norme v_s de la vitesse en sortie du guide, le plus simple est donc d'appliquer le théorème de l'énergie cinétique.

- ▷ Système : projectile ;
- ▷ Référentiel : terrestre, supposé galiléen ;
- ▷ Bilan des actions mécaniques :
  - → en première approche, on néglige tous les frottements ;
  - → le mouvement du projectile est horizontal, son poids est donc compensé par une force de réaction normale ;
  - → la force de Laplace vaut $\vec{F}_\mathrm{L} = I(a\,\vec{e}_y) \wedge (B\,\vec{e}_z) = IaB\,\vec{e}_x$, il s'agit d'une force motrice constante, son travail au cours du déplacement du projectile sur toute la longueur L des rails vaut donc

$$W_\mathrm{L} = IaB\,L\,.$$

- ▷ Théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{1}{2} m{v_\mathrm{s}}^2 - 0 = W \qquad \text{soit} \qquad \frac{1}{2} m{v_\mathrm{s}}^2 = IaB\,L\,.$$

et finalement

$$v_\mathrm{s} = \sqrt{\frac{2IaB\,L}{m}} = 3 \cdot 10^3\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

ce qui est dix fois supérieur à la vitesse du son. En pratique, les frottements divisent cette vitesse de sortie par environ 2.