BLAISE PASCAL
PT 2020-2021

Fiche outil

Analyse dimensionnelle

Plan du cours

Au programme

Extrait du programme officiel : appendice 3 « Outils transversaux », bloc 1 « Analyse de pertinence ».

S'agissant de l'analyse dimensionnelle, il convient d'éviter tout dogmatisme : en particulier la présentation de la dimension d'une grandeur par le biais de son unité dans le système international est autorisée. S'agissant de la recherche d'une expression par analyse dimensionnelle il ne s'agit en aucun cas d'en faire un exercice de style : en particulier le théorème Pi de Buckingham est hors-programme.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Homogénéité d'une expression.	Contrôler l'homogénéité d'une expression, notamment par référence à des expressions connues.
Caractère scalaire ou vectoriel des grandeurs physiques présentes dans une expression.	Contrôler la compatibilité d'une expression avec le caractère scalaire ou vectoriel des grandeurs mises en jeu.
Caractère infinitésimal ou non infinitésimal des grandeurs physiques présentes dans une expression.	Contrôler la compatibilité d'une expression avec le caractère infinitésimal ou non infinitésimal des grandeurs mises en jeu.

En **gras**, les points devant faire l'objet d'une approche expérimentale.

Extrait du programme officiel : appendice 3 « Outils transversaux », bloc 4 « Analyse dimensionnelle ».

Notions et contenus	Capacités exigibles
Dimension d'une expression.	Déterminer la dimension d'une expression, notamment par référence à des expressions connues.
Recherche d'une expression de type monôme par analyse dimensionnelle.	Déterminer les exposants d'une expression de type monôme $E = A^\alpha B^\beta C^\chi$ par analyse dimensionnelle.

En **gras**, les points devant faire l'objet d'une approche expérimentale.

I - Dimensions et unités

I.1 - Définitions

- **Dimensions**

Seules certaines grandeurs peuvent être comparées entre elles, par exemple une longueur d'onde et la taille d'une ouverture pour savoir s'il y a diffraction, mais d'autres comparaisons n'ont pas de sens : « l'ouverture est plus large que la fréquence de l'onde ». Ceci est formalisé par la notion de **dimension**.

Seules des grandeurs de même dimension peuvent être comparées. Elles sont alors dites **homogènes**.

La dimension d'une grandeur physique X est notée entre crochets $[X]$.

Par abus de langage, on appelle dimension d'un vecteur la dimension de sa norme, identique à la dimension de chacune de ses composantes.

- **Unités**

Pour écrire (décrire) le résultat de mesures, il est nécessaire de disposer de références communes : les **unités**.

> ***Exemple :*** *La largeur ℓ d'une feuille de papier A4 vaut 21,0 cm dans le système métrique et 0,689 pieds dans le système anglo-saxon. Écrire $\ell = 21{,}0\,\mathrm{cm} = 0{,}689\,\mathrm{pieds}$ a du sens, mais écrire $21{,}0 = 0{,}689$ est évidemment aberrant.*

Deux conclusions importantes à cet exemple :

Une représentation numérique d'une grandeur physique n'a de sens que si elle est accompagnée d'une unité.

Plusieurs unités différentes peuvent être associées à une même dimension physique.

De plus, cet exemple fait ressortir la nécessité d'un système d'unités cohérent au niveau international : c'est le fameux système international SI, datant lui aussi de 1960. Aujourd'hui, toutes les unités sont définies à partir de phénomènes physiques. Le kilogramme est resté défini par la masse d'un étalon jusqu'à l'automne 2018, ce qui posait bon nombre de problèmes, et une nouvelle définition basée sur la constante de Planck a été adoptée.

- **Grandeurs sans dimension**

Il existe des grandeurs sans dimension.

En particulier, le rapport de deux grandeurs dimensionnées, les angles et tous les nombres (π, $\sqrt{2}$, 3, etc.), qu'il s'agisse de constantes « géométriques » (périmètre d'un cercle $2\pi R$) ou « de dénombrement » (durée d'un aller-retour $= 2 \times$ durée d'un aller simple), sont sans dimension.

> ***Remarque :*** *L'exemple des angles montre qu'une grandeur sans dimension n'est pas forcément sans unité.*

Par convention et pour alléger les écritures, zéro est homogène à n'importe quelle grandeur.

I.2 - Système International

Combien de dimensions sont nécessaires pour décrire la totalité des grandeurs physiques ? La réponse n'est pas évidente ! On voit bien qu'il y a de la redondance : la dimension d'une vitesse est clairement reliée à celle d'une longueur et d'un temps.

La solution retenue par convention est le Système International, adopté en 1960, qui repose sur sept dimensions de bases indépendantes les unes des autres (cf. définitions en annexe) :

- longueur, notée symboliquement L ;
- masse M ;
- temps T ;
- intensité électrique I ;
- température Θ ;
- quantité de matière N ;
- intensité lumineuse J (quasi-inutilisée).

La dimension de toute quantité physique est un produit (ou quotient) de ces sept dimensions fondamentales.

Attention ! Ne pas confondre les notations des *dimensions* avec celles des *unités* (en particulier M est la dimension masse et m l'unité mètre) ni avec celles qui peuvent être attribuées aux différentes grandeurs dans un exercice.

Toutes les autres dimensions s'obtiennent par produit et quotient des dimensions fondamentales.

I.3 - Déterminer la dimension d'une grandeur physique

En pratique, trouver la dimension d'une grandeur se fait à partir de lois ou de définitions connues ou encore en utilisant son unité. Les égalités reliant entre elles la dimension de plusieurs grandeurs sont appelées des **équations aux dimensions**. Elles se résolvent exactement comme les équations algébriques « normales ».

> ***Exemples :***
> ▷ *Énergie : la relation d'Einstein s'écrit « $E = mc^2$ » donc $[E] = M\,L^2\,T^{-2}$.*
> ▷ *Puissance : énergie par unité de temps donc $[\mathcal{P}] = [E]\,T^{-1} = M\,L^2\,T^{-3}$.*
> ▷ *Résistance : la puissance dissipée par effet Joule vaut « $\mathcal{P} = RI^2$ » donc $[R] = [\mathcal{P}]\,I^{-2} = M\,L^2\,T^{-3}\,I^{-2}$.*

II - Opérations mathématiques sur les grandeurs dimensionnées

- **Somme et différence**

Par définition de l'homogénéité, tous les termes d'une somme ou d'une différence ont la même dimension, et le résultat également.

- **Produit et quotient**

On peut multiplier ou diviser des grandeurs de n'importe quelles dimensions. La dimension d'un produit est le produit des dimensions, de même pour les quotients ou les puissances.

- **Dérivation**

> ***Exemple :*** *la vitesse d'un objet en chute verticale le long d'un axe z est donnée par*
> $$v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,.$$
> *On constate que la dérivation change la dimension : $[z] = L$ mais $[v_z] = L\,T^{-1}$.*

Cet exemple se généralise :

> La dimension de la dérivée d'une grandeur est la dimension de la grandeur divisée par la dimension de la variable par rapport à laquelle on dérive.

> ***Remarque :*** *Ce résultat se voit très bien sur la notation différentielle de la dérivée, c'est l'une des raisons pour lesquelles elle est préférée par les physiciens au « prime » des mathématiciens.*

> ***Exemple :*** *D'après la seconde loi de Newton, « $\vec{F} = m\dfrac{\mathrm{d}\,\vec{v}}{\mathrm{d}t}$ » donc la dimension d'une force est*
> $$[F] = M \times \frac{[v]}{T} = M\,L\,T^{-2}$$

- **Intégration**

> ***Exemple :*** *Connaissant la puissance $\mathcal{P}(t)$ reçue à tout instant par un dipôle électrique, on en déduit l'énergie totale qu'il a reçue entre deux instants t_1 et t_2 par*
> $$\mathcal{E} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}(t)\,\mathrm{d}t\,.$$
> *On constate que l'intégration change la dimension.*

Cet exemple se généralise :

> La dimension de l'intégrale d'une grandeur est la dimension de la grandeur multipliée par celle de la variable par rapport à laquelle on intègre.

Là encore, la dimension se voit bien sur l'écriture de l'intégrale en considérant l'élément différentielle comme dimensionné.

- **Fonctions usuelles (fonctions transcendantes)**

Une fonction transcendante est une fonction mathématique de type exponentielle, logarithme ou cosinus.

L'argument d'une fonction transcendante est forcément sans dimension.

> ***Exemples :***
> ▷ $\exp(-t/\tau)$: *si* $[t] = T$ *alors* $[\tau] = T$;
> ▷ $\cos(kx)$: *si* $[x] = L$ *alors* $[k] = L^{-1}$.

Une image par une fonction transcendante est sans dimension.

> ***Exemples :*** $[\exp(-t/\tau)] = 1$ *et* $[\cos(kx)] = 1$.

III - L'analyse dimensionnelle comme outil de vérification

Une relation inhomogène est forcément fausse.

... mais la réciproque est fausse : une relation homogène n'est pas forcément juste.

L'homogénéité s'entend ici dans un sens plus large : il s'agit non seulement de l'homogénéité des dimensions, mais aussi sur le caractère scalaire ou vectoriel d'une expression, ou encore l'aspect infinitésimal ou fini.

> ***Remarque :*** *Il est rarement nécessaire d'exprimer toutes les dimensions en fonction de dimensions de base, ce qui alourdit les écritures. En fonction du contexte, on conservera les forces, les énergies, les tensions, etc. Pour que les vérifications soient faciles, il faut avoir gardé des expressions littérales jusqu'à la fin des calculs !*

IV - L'analyse dimensionnelle comme outil de prédiction

IV.1 - Principe

Le comportement de tout système physique est décrit par certaines grandeurs caractéristiques : la capacité d'un condensateur, la constante de raideur d'un ressort, et même plus généralement la période d'un oscillateur harmonique ou encore la vitesse limite d'une bille dans un fluide visqueux. Ces grandeurs caractéristiques peuvent être modifiées en jouant sur des paramètres de contrôle.

paramètres de contrôle → Système physique à caractériser → grandeurs caractéristiques du comportement

identifiés :
- expérimentalement
- connaissance a priori
- intuition

identifiées :
- expérimentalement
- connaissance a priori

Les grandeurs caractéristiques du comportement du système
sont reliées aux paramètres de contrôle par des relations homogènes.

Ce principe peut sembler très simple, mais il est tellement utile que l'analyse dimensionnelle est souvent une première étape à l'étude d'un nouveau phénomène.

IV.2 - Présentation de la méthode sur un exemple

Considérons un oscillateur masse-ressort horizontal : un solide de masse m est attaché à l'extrémité d'un ressort de raideur k dont l'autre extrémité est fixée à un bâti. Le ressort est initialement étiré selon un allongement initial $\Delta\ell_{\mathrm{i}}$, puis lâché sans vitesse initiale.

$\rightsquigarrow$ On observe des oscillations périodiques dont on cherche à exprimer la période T_0.

D'après le « principe d'homogénéité » il existe trois exposants a, b, c et un nombre sans dimension A tels que la relation

$$T_0 = A\, m^a\, k^b\, {\Delta\ell_{\rm i}}^c$$

soit homogène. L'**équation aux dimensions** associée s'écrit

$$[T_0] = [A]\,[m]^a\,[k]^b\,[\Delta\ell_{\rm i}]^c\,.$$

On sait que la constante de raideur k s'exprime en $\mathrm{N\cdot m^{-1}}$, ainsi

$$[k] = \frac{[\text{force}]}{L} = \frac{M\,L\,T^{-2}}{L} = M\,T^{-2}\,.$$

D'après l'équation aux dimensions, les trois exposants sont donc tels que

$$T = 1 \times M^a \times M^b T^{-2b} \times L^c\,.$$

Par identification des dimensions dans les deux membres de l'équation, on aboutit au système

$$\begin{cases} 1 = -2b & \text{(dimension } T) \\ 0 = a + b & \text{(dimension } M) \\ 0 = c & \text{(dimension } L) \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} b = -1/2 \\ a = 1/2 \\ 0 = c \end{cases} \qquad \text{soit} \qquad T_0 = A\sqrt{\frac{m}{k}}$$

En PTSI, vous avez montré que $T_0 = 2\pi\sqrt{m/k}$: le facteur 2π est sans dimension donc on ne peut pas le déterminer par analyse dimensionnelle ... en revanche nous venons de montrer que la période des oscillations ne dépend pas de la condition initiale, ce qui n'est pas intuitif du tout, et ce en quelques lignes seulement, sans résoudre d'équation différentielle.

$\rightsquigarrow$ l'analyse dimensionnelle est une méthode extrêmement puissante !

IV.3 - Limitations

L'outil est puissant ... mais il faut avoir parfaitement identifié les paramètres de contrôle, ce qui, sur un problème réellement inconnu, n'est pas du tout évident.

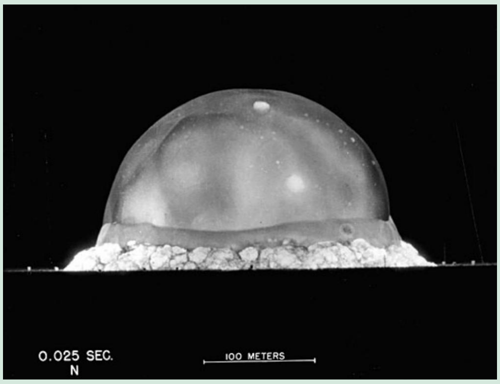
Se pose ensuite la question de l'existence et de l'unicité des solutions au système obtenu via l'équation aux dimensions :

- s'il n'existe aucune solution au système, le diagnostic est simple : il manque un paramètre de contrôle ... le trouver est une autre affaire ;
- plus fréquemment, le système peut admettre une infinité de solutions si plusieurs paramètres de contrôle de dimensions reliées apparaissent : dans ce cas, l'analyse dimensionnelle est impuissante car une combinaison sans dimension de ces paramètres peut intervenir dans n'importe quelle fonction transcendante, qui échappe à toute analyse dimensionnelle et peut considérablement changer l'ordre de grandeur du résultat.

> ***Exemple :*** *Un condensateur plan est constitué de deux armatures conductrices planes, de surface S, séparées d'une distance d et se faisant face. En plus de ces paramètres géométriques, la capacité du condensateur implique la permittivité diélectrique du vide $\varepsilon_0 = 8{,}89 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{F\cdot m^{-1}}$.*
>
> *Le « postulat d'homogénéité » indique que*
>
> $$C = A\,{\varepsilon_0}^a\,S^b\,e^c$$
>
> *avec A une constante sans dimension. L'équation aux dimensions associée est*
>
> $$[\text{capacité}] = 1 \times [\text{capacité}]^a L^{-a} \times L^{2b} \times L^c$$
>
> *d'où on déduit le système*
>
> $$\begin{cases} 1 = a \\ 0 = -a + 2b + c \end{cases}$$
>
> *Ce système compte deux équations pour trois inconnues, et n'admet donc pas de solution unique : on ne peut pas déterminer les exposants de cette manière.*

IV.4 - Un exercice pour finir

Exercice C1 : Énergie dégagée par l'explosion nucléaire Trinity



Trinity est le nom de code du premier essai nucléaire de l'histoire. L'explosion eut lieu le 16 juillet 1945 à Alamogordo au Nouveau Mexique, dans une zone désertique nommée Jornada del Muerto. Étant l'ultime étape du projet Manhattan, lancé par les États-Unis durant la seconde guerre mondiale, les données concernant ce projet était classées ultra-secrètes par la CIA.

Pourtant, le physicien anglais G. I. Taylor a pu estimer l'ordre de grandeur de l'énergie dégagée par cette explosion par une analyse dimensionnelle judicieuse sur la base d'un film. Le film permet de suivre au cours du temps le rayon $R(t)$ du « nuage » formé par l'explosion. Cet exercice propose de reproduire le raisonnement de Taylor.

Des connaissances en mécanique des fluides et thermodynamique suggèrent que les paramètres influant sur le rayon du nuage sont évidemment le temps t s'étant écoulé depuis l'explosion et l'énergie E libérée par l'explosion, mais aussi la masse volumique de l'air ρ.

Données : $\rho = 1{,}3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$; $1{,}3^6 \simeq 4{,}8$.

1 - Établir la dimension d'une énergie en fonction des dimensions de bases du système international.

2 - Taylor a supposé que le rayon du nuage s'écrit en fonction des paramètres cités ci-dessus sous la forme

$$R(t) = E^a\, t^b\, \rho^c\,,$$

où a, b et c sont trois constantes. Déterminer les constantes a, b et c.

3 - Déduire de la question précédente l'expression de l'énergie libérée en fonction de R, ρ et t.

4 - Estimer l'ordre de grandeur de sa valeur numérique à partir de la photographie.

5 - Plusieurs années plus tard, la CIA a révélé que les mesures réalisées sur place permettaient d'estimer que l'énergie libérée par la bombe était d'environ 20 kilotonnes de TNT. Sachant que l'explosion de 1 kg de TNT libère environ $4\cdot 10^6$ J, calculer l'énergie libérée par l'explosion Trinity et commenter la qualité du résultat obtenu par analyse dimensionnelle.

Correction :

$\boxed{1}$ On peut utiliser par exemple la célèbre relation $E = mc^2$ définissant l'énergie de masse, où m est une masse et c la célérité de la lumière. Ainsi,

$$[E] = [m]\times[c]^2 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{[E] = M\,L^2\,T^{-2}\,.}$$

$\boxed{2}$ Les exposants a, b et c doivent être tels que la relation donnée soit homogène. L'équation aux dimensions associée s'écrit

$$[R] = [E]^a\,[t]^b\,[\rho]^c \qquad \text{soit} \qquad L = M^a\,L^{2a}\,T^{-2a}\times T^b\times M^c\,L^{-3c}\,.$$

L'homogénéité de la relation conduit au système (dans l'ordre M, L, T)

$$\begin{cases} 0 = a + c \\ 1 = 2a - 3c \\ 0 = -2a + b \end{cases} \iff \begin{cases} a = -c \\ 1 = 5a \\ 2a = b \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1/5 \\ b = 2/5 \\ c = -1/5 \end{cases}$$

ce qui conduit finalement à

$$\boxed{R(t) = \frac{E^{1/5}\,t^{2/5}}{\rho^{1/5}}}$$

$\boxed{3}$ Tout le travail est fait, puisqu'il suffit d'élever à la puissance 5 la relation précédente et de l'inverser pour obtenir

$$\boxed{E = \frac{R(t)^5\,\rho}{t^2}}$$

4 La photographie est prise à $t = 2{,}5 \cdot 10^{-2}$ s après l'explosion et on mesure grâce à l'échelle un rayon $R = 130$ m. On en déduit, en joules,

$$E \simeq \frac{(1{,}3 \cdot 10^2)^5 \times 1{,}3}{(2{,}5 \cdot 10^{-2})^2} \simeq \frac{4{,}8 \cdot 10^{10}}{4 \cdot 10^{-4}} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{E \simeq 1{,}2 \cdot 10^{14}\,\mathrm{J}}$$

5 L'énergie libérée par Trinity équivaut à $20 \cdot 10^6$ kg de TNT, soit

$$\boxed{E \simeq 8 \cdot 10^{13}\,\mathrm{J}\,.}$$

Compte tenu que la constante numérique a été prise égale à 1 arbitrairement, **le résultat est excellent !**

Annexe : Définition des unités fondamentales

Le mètre m, unité de longueur : distance parcourue par la lumière dans le vide en 1/299 792 458 seconde. Conséquences : la définition du mètre dépend de celle de la seconde, la vitesse de la lumière n'est plus mesurée mais fixée par convention. Définition datant de 1983. Les définitions historiques de l'unité de longueur reposaient sur le corps humain (pieds, pouces, brasses, ...) et étaient particulièrement confuses : la création d'un système métrique simplifié apparaît dans les cahiers de doléance de 1788 ! Le mètre a alors été défini en 1790 comme la longueur d'un pendule qui aurait pour période deux secondes, puis la définition a été reprécisée à partir du méridien terrestre en 1795 et par la suite d'objets étalons et de longueurs d'ondes de raies spectrales.

La seconde s, unité de temps : durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre deux niveaux quantiques de l'atome de césium 133, précisément les niveaux hyperfins $F = 3$ et $F = 4$ de l'état fondamental $6\mathrm{S}_{1/2}$. Définition datant de 1967. Les définitions historiques s'appuyaient au tout début sur le rythme cardiaque, puis la durée du jour, puis celle d'une année.

Le kilogramme kg, unité de masse : jusqu'au 20 mai 2019, masse du prototype international du kilogramme, coulé en 1899 et conservé depuis au Bureau International des Poids et Mesures. Désormais, le kilogramme est défini à partir de la constante de Planck $h = 6{,}626\,070\,15 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}}$, dont la valeur est par convention exactement fixée. Ainsi, la définition du kilogramme dépend de celles du mètre et de la seconde.

L'ampère A, unité d'intensité électrique : intensité d'un courant constant qui, s'il est maintenu dans deux conducteurs linéaires et parallèles, de longueurs infinies, de sections négligeables, et distants d'un mètre dans le vide, produit entre ces deux conducteurs une force linéaire exactement égale à $2 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{N \cdot m^{-1}}$. Conséquences : la définition de l'ampère dépend de celles du mètre, du kilogramme et de la seconde, et fixe par convention la valeur de la perméabilité magnétique du vide μ_0. Définition datant de 1948. Une redéfinition à partir d'effets quantiques très stables (le volt Josephson) est à l'étude.

Le kelvin K, unité de température : fraction 1/273,16 de la température thermodynamique du point triple de l'eau, où elle coexiste sous ses trois phases gaz, liquide et solide. Définition datant de 1967.

La mole mol, unité de quantité de matière : jusqu'au 20 mai 2019, nombre d'atomes dans exactement 12 g de l'isotope carbone 12. Désormais, le nombre d'Avogadro $\mathcal{N}_\mathrm{A} = 6{,}022\,140\,76 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$ est exactement fixé par convention ... et la quantité de matière de 12 g de carbone est redevenue une grandeur mesurable.

La candela cd, unité d'intensité lumineuse : intensité lumineuse, dans une direction donnée, d'une source qui émet un rayonnement monochromatique de fréquence exactement $5{,}4 \cdot 10^{14}$ Hz dont l'intensité énergétique dans cette direction est 1/683 watt par stéradian. Conséquence : la définition de la candela dépend de celles du mètre, du kilogramme et de la seconde. Définition datant de 1979. Historiquement, la définition reposait sur l'intensité lumineuse émise par une bougie. La candela fait appel à la physiologie de l'œil humain, et n'est donc pas adaptée aux autres détecteurs : une bougie et une ampoule à incandescence de 100 W chacune ont respectivement une intensité lumineuse de l'ordre de la candela et de la centaine de candela car leur spectre d'émission lumineuse est différent.