BLAISE PASCAL
PT 2020-2021

Fiche outil

Analyse vectorielle

Plan du cours

Au programme

Extrait du programme officiel : appendice 2 « Outils mathématiques », bloc 1 « Analyse vectorielle ».

Le thème « analyse vectorielle » n'a pas fait l'objet d'une rubrique en première année, les expressions des différents opérateurs introduits sont exigibles en coordonnées cartésiennes. Les expressions des opérateurs en coordonnées cylindriques et sphériques et les formules d'analyse vectorielle ne sont pas exigibles ; elles doivent donc être systématiquement rappelées.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Gradient.	Connaître le lien entre le gradient et la différentielle. Exprimer les composantes du gradient en coordonnées cartésiennes. Utiliser le fait que le gradient d'une fonction f est perpendiculaire aux surfaces iso-f et orienté dans le sens des valeurs de f croissantes.
Divergence.	Citer et utiliser le théorème d'Ostrogradski. Exprimer la divergence en coordonnées cartésiennes.
Rotationnel.	Citer et utiliser le théorème de Stokes. Exprimer le rotationnel en coordonnées cartésiennes.
Laplacien d'un champ scalaire.	Définir $\Delta f = \mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f)$. Exprimer le laplacien en coordonnées cartésiennes.
Laplacien d'un champ de vecteurs.	Exprimer le laplacien d'un champ de vecteurs en coordonnées cartésiennes. Utiliser la formule d'analyse vectorielle $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\,\vec{A}) - \vec{\Delta}\vec{A}$.

En **gras**, les points devant faire l'objet d'une approche expérimentale.

Notations : dans toute cette fiche,
- f désigne un **champ scalaire**, c'est-à-dire une fonction $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ qui à tout point M de l'espace (trois coordonnées réelles) associe un nombre réel ;
- $\vec{A}$ désigne un **champ vectoriel**, c'est-à-dire une fonction $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ qui à tout point M de l'espace (trois coordonnées réelles) associe un vecteur.

I - Intégrales

I.1 - Intégrales de chemin

Notation	Signification	Variantes et remarques	Exemples
$\int_{\mathcal{C}} f(M)\,\mathrm{d}\ell$	Intégrale de la quantité $f(M)$ le long d'un chemin ou contour $\mathcal{C}$.	$\int_A^B f(M)\,\mathrm{d}\ell$: même chose mais en précisant le début et la fin du chemin. Attention, il faut préciser le détail du chemin. $\oint_{\mathcal{C}} f(M)\,\mathrm{d}\ell$: même chose mais le contour est fermé. Attention, il faut préciser le sens de parcours.	Chemin optique $(AB) = \int_{\mathcal{C}} n(M)\,\mathrm{d}\ell$ Longueur d'une courbe $L_{AB} = \int_A^B \mathrm{d}\ell$
$\int_{\mathcal{C}} \vec{A}(M)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$ (**circulation**)	Intégrale de $\vec{A}(M)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$ le long du chemin ou contour orienté $\mathcal{C}$. Vecteur $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$ tangent et orienté dans le même sens que le chemin.	Idem.	Travail d'une force $W = \int_A^B \vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$ Circulation du champ magnétique (th. d'Ampère) $\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}(M)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$

I.2 - Intégrales de surface

Notation	Signification	Variantes et remarques	Exemples
$\iint_{\mathcal{S}} f(M)\,\mathrm{d}S$	Intégrale de la quantité $f(M)$ sur la surface $\mathcal{S}$.	$\oiint_{\mathcal{S}} f(M)\,\mathrm{d}S$: même chose mais la surface est fermée.	Expression de la surface : $S = \iint_{\mathcal{S}} \mathrm{d}S$
$\iint_{\mathcal{S}} f(M)\,\overrightarrow{\mathrm{d}S}$	Intégrale de la quantité $f(M)$ sur la surface orientée $\mathcal{S}$. Vecteur $\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \mathrm{d}S\,\vec{n}$ normal à la surface, orientation à préciser.	Le résultat est un vecteur.	Force de pression : $\vec{F}_{\mathrm{p}} = \iint_{\mathcal{S}} P\,\overrightarrow{\mathrm{d}S}$
$\iint_{\mathcal{S}} \vec{A}(M)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ (**flux**)	Intégrale de $\vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ sur la surface orientée $\mathcal{S}$.	Le résultat est un scalaire. $\oiint_{\mathcal{S}} \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$: même chose mais la surface est fermée.	Flux du champ électrique (th. de Gauss) : $\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ Débit volumique $D_V = \iint_{\mathcal{S}} \vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ Flux thermique $\iint_{\mathcal{S}} \vec{j}_{\mathrm{th}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ Intensité $\iint_{\mathcal{S}} \vec{j}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$

I.3 - Intégrales de volume

Notation	Signification	Variantes et remarques	Exemples
$\iiint_{\mathcal{V}} f(M)\,\mathrm{d}V$	Intégrale de la quantité $f(M)$ sur le volume V.		Expression du volume : $V = \iiint_{\mathcal{V}} \mathrm{d}V$ Masse totale $M = \iiint_{\mathcal{V}} \rho\,\mathrm{d}V$ Charge totale $Q = \iiint_{\mathcal{V}} \rho\,\mathrm{d}V$

II - Opérateurs vectoriels

• **Notations :**

▷ comme précédemment, f est un champ scalaire et $\overrightarrow{A}$ un champ vectoriel ;
▷ pour alléger les notations des dérivées partielles, les variables gardées constantes sont sous-entendues ;
▷ on utilise une notation « matricielle » pour les vecteurs :

$$\overrightarrow{A} = A_x \overrightarrow{e}_x + A_y \overrightarrow{e}_y + A_z \overrightarrow{e}_z \overset{\text{déf.}}{=} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

• **Nabla :** il s'agit d'une notation symbolique, très pratique pour retrouver les formules des différents opérateurs en coordonnées cartésiennes (mais attention, pas pour les autres systèmes de coordonnées). Formellement, on peut l'écrire avec des composantes, comme un vecteur, mais qui sont des opérateurs de dérivation :

$$\overrightarrow{\nabla} \overset{\text{déf.}}{=} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Nabla ne vient jamais seul, mais s'applique nécessairement à un champ scalaire ou vectoriel.

> ***Remarque :*** *Dans la littérature anglo-saxonne, les opérateurs vectoriels sont systématiquement notés avec nabla.*

II.1 - Expressions en coordonnées cartésiennes

Tous les résultats de ce paragraphe sont à connaître parfaitement,
ou (pour le rotationnel seulement) à retrouver très vite.

Opérateur	Départ et arrivée	Expression en coordonnées cartésiennes	Le retrouver avec nabla
Gradient $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$	s'applique à un **scalaire** retourne un **vecteur**	$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}$	$\overrightarrow{\nabla} f = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} f = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}$
Divergence $\text{div}\, \overrightarrow{A}$	s'applique à un **vecteur** retourne un **scalaire**	$\dfrac{\partial A_x}{\partial x} + \dfrac{\partial A_y}{\partial y} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$	$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \dfrac{\partial A_x}{\partial x} + \dfrac{\partial A_y}{\partial y} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$
Rotationnel $\overrightarrow{\text{rot}}\, \overrightarrow{A}$	s'applique à un **vecteur** retourne un **vecteur**	$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y} \end{bmatrix}$	$\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y} \end{bmatrix}$

Opérateur	Départ et arrivée	Expression en coordonnées cartésiennes	Le retrouver avec nabla
Laplacien scalaire Δf	s'applique à un **scalaire** retourne un **scalaire**	$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\nabla^2 f = \left\Vert \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{matrix} \right\Vert^2 f = \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right) f$
Laplacien vectoriel $\vec{\Delta}\vec{A}$	s'applique à un **vecteur** retourne un **vecteur**	$\vec{\Delta}\vec{A} = \begin{bmatrix} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{bmatrix} = \dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial z^2}$	

II.2 - Expressions dans les autres systèmes de coordonnées

a) Coordonnées cylindriques : cas général à ne pas retenir

▷ $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \dfrac{\partial f}{\partial r}\,\vec{e}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \theta}\,\vec{e}_\theta + \dfrac{\partial f}{\partial z}\,\vec{e}_z$

▷ $\mathrm{div}\,\vec{A} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial (rA_r)}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$

▷ $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_z}{\partial \theta} - \dfrac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\dfrac{\partial A_r}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \dfrac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_z$

▷ $\Delta f = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial f}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

b) Coordonnées sphériques : cas général à ne pas retenir

▷ $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \dfrac{\partial f}{\partial r}\,\vec{e}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \theta}\,\vec{e}_\theta + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial f}{\partial \varphi}\,\vec{e}_\varphi$

▷ $\mathrm{div}\,\vec{A} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial (r^2A_r)}{\partial r} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial (\sin\theta\, A_\theta)}{\partial \theta} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$

▷ $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \dfrac{1}{r\sin\theta}\left(\dfrac{\partial (\sin\theta\, A_\varphi)}{\partial \theta} - \dfrac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_r + \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \dfrac{\partial (r\,A_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \dfrac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_\varphi$

▷ $\Delta f = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial f}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\,\dfrac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$

c) Deux cas particuliers qui peuvent être utiles

- **Champ scalaire à symétrie cylindrique**

Le champ f ne dépend que de la distance r à un axe : cela revient en coordonnées cylindriques à $f(r,\theta,z) = f(r)$ seulement, ce qui annule certaines dérivées. Dans ce cas,

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\vec{e}_r \qquad \text{et} \qquad \Delta f = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\right).}$$

- **Champ scalaire à symétrie sphérique**

Le champ f ne dépend que de la distance r à un point : cela revient en coordonnées sphériques à $f(r,\theta,\varphi) = f(r)$ seulement, ce qui annule certaines dérivées. Dans ce cas,

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\vec{e}_r \qquad \text{et} \qquad \Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\right).}$$

Attention ! L'expression du gradient est la même dans les deux cas, mais pas celle du Laplacien.

II.3 - Opérateurs et lignes de champ

a) Gradient

La définition formelle de l'opérateur gradient indique qu'au cours d'un déplacement élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{M}$, le champ f varie de

$$\boxed{\mathrm{d}f = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{M}\,.}$$

Ce lien entre différentielle et gradient est très explicite en coordonnées cartésiennes, puisque nous avons défini la différentielle par

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z\,.$$

Cependant, il est bien plus général ... et permet d'ailleurs de retrouver l'expression du gradient dans tous les systèmes de coordonnées connaissant celle du déplacement élémentaire.

En raisonnant qualitativement sur un déplacement élémentaire tel que $\mathrm{d}f > 0$ (f augmente), on constate qu'alors $\mathrm{d}\overrightarrow{M}$ et $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$ sont « plutôt dans le même sens ». Plus généralement, le gradient d'un champ f est orienté dans le sens des valeurs de f croissantes.

Si le déplacement élémentaire se fait à f constant, alors $\mathrm{d}f = 0$: on en déduit que le gradient d'un champ f est perpendiculaire aux surfaces iso-f, c'est-à-dire les surfaces où $f = $ cte.

b) Divergence

De façon schématique, en un point M autour duquel $||\overrightarrow{A}||$ ne varie pas,
- ▷ si $\mathrm{div}\, \overrightarrow{A} > 0$, les lignes de champ de $\overrightarrow{A}$ divergent ;
- ▷ si $\mathrm{div}\, \overrightarrow{A} < 0$, les lignes de champ de $\overrightarrow{A}$ convergent ;
- ▷ si $\mathrm{div}\, \overrightarrow{A} = 0$, les lignes de champ de $\overrightarrow{A}$ ne divergent ni ne convergent : elles sont ou bien parallèles, ou bien circulaires.

Ces résultats ne sont que qualitatifs, et ne sont généralement plus vrais si $||\overrightarrow{A}||$ varie. Dans ce cas il n'y a pas de relation générale simple.

c) Rotationnel

De façon schématique, en un point M autour duquel $||\overrightarrow{A}||$ ne varie pas,
- ▷ si $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overrightarrow{A} = \overrightarrow{0}$, les lignes de champ de $\overrightarrow{A}$ ne s'enroulent pas : elles sont ou bien parallèles, ou bien parfaitement « en oursin », c'est-à-dire parfaitement convergentes ou divergentes ;
- ▷ si $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overrightarrow{A} \neq \overrightarrow{0}$, les lignes de champ de $\overrightarrow{A}$ s'enroulent en sens trigonométrique autour de la direction donnée par $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overrightarrow{A}$.

Ces résultats ne sont que qualitatifs, et ne sont généralement plus vrais si $||\overrightarrow{A}||$ varie. Dans ce cas il n'y a pas de relation générale simple.

d) Et en dessin

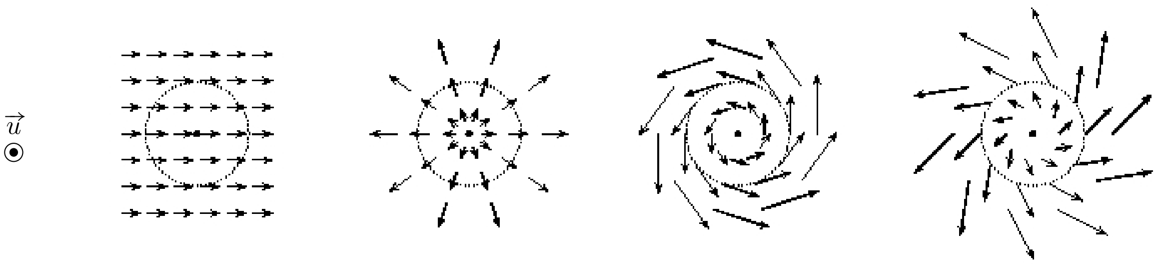


Figure 1 – Opérateurs vectoriels et lignes de champ.

Sur la figure 1,
- ▷ Gauche : $\mathrm{div}\, \overrightarrow{A} = 0$ et $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overrightarrow{A} = \overrightarrow{0}$;
- ▷ Centre gauche : $\mathrm{div}\, \overrightarrow{A} > 0$ et $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overrightarrow{A} = \overrightarrow{0}$;
- ▷ Centre droit : $\mathrm{div}\, \overrightarrow{A} = 0$ et $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overrightarrow{A} \neq \overrightarrow{0}$ porté par $\overrightarrow{u}$;
- ▷ Droite : $\mathrm{div}\, \overrightarrow{A} > 0$ et $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overrightarrow{A} \neq \overrightarrow{0}$ porté par $\overrightarrow{u}$;

II.4 - Identités entre opérateurs

Ces identités servent dans des démonstrations générales, formelles, mais rarement dans des cas pratiques. Seule les deux premières sont à mémoriser.

- **Une identité très, très utile :**

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\,\vec{A}) - \Delta\vec{A}\,.}$$

- **Définition du laplacien :** formellement, le laplacien scalaire est défini par

$$\boxed{\Delta f = \mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f)\,.}$$

- **Deux cas d'annulation :** pour tous champs vectoriels et en tout point de l'espace,

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f) = \vec{0} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}) = 0\,.$$

Ces identités sont utiles pour des démonstrations formelles, générales. Elles peuvent se retrouver avec $\vec{\nabla}$:
▷ la première s'écrit $\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\,f)$, or « $\vec{\nabla}\wedge\vec{\nabla} = \vec{0}$ » ;
▷ la deuxième s'écrit $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{A})$, or « $\vec{\nabla}$ perpendiculaire à $\vec{\nabla}\wedge\vec{A}$ ».

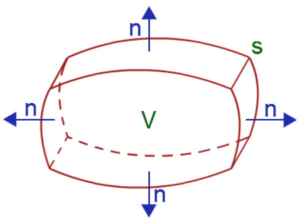
- **Développement de produits :** hormis le gradient d'un produit, ces identités ne sont utiles que dans des cas vraiment exceptionnels en PT ... et sont surtout mentionnées pour montrer qu'elles ne sont pas évidentes !

▷ $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(fg) = f\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,g + g\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f$
▷ $\mathrm{div}\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right) = \vec{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} - \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}$
▷ $\mathrm{div}\left(f\,\vec{A}\right) = f\,\mathrm{div}\,\vec{A} + \left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f\right)\cdot\vec{A}$
▷ etc.

III - Théorèmes sur les intégrales des opérateurs

Ces théorèmes sont valables sous des hypothèses de régularité (c'est-à-dire schématiquement de continuité et dérivabilité) des champs considérés, qui seront toujours valables pour les grandeurs physiques que nous étudions. Ils sont utiles pour des démonstrations générales, formelles.

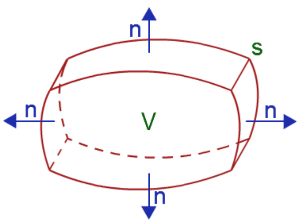
- **Théorème du gradient :** (hors programme)



Soit $\mathcal{V}$ un volume, délimité par la surface (fermée) $\mathcal{S}_\mathcal{V}$. La surface est orientée vers l'extérieur. Alors,

$$\iiint_\mathcal{V} (\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f)\,\mathrm{d}V = \oiint_{\mathcal{S}_\mathcal{V}} f\,\mathrm{d}\vec{S}\,.$$

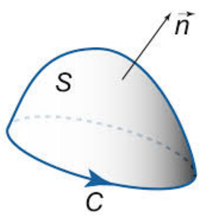
- **Théorème de Green-Ostrogradski :**



Soit $\mathcal{V}$ un volume, délimité par la surface (fermée) $\mathcal{S}_\mathcal{V}$. La surface est orientée vers l'extérieur. Alors,

$$\iiint_\mathcal{V} (\mathrm{div}\,\vec{A})\,\mathrm{d}V = \oiint_{\mathcal{S}_\mathcal{V}} \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}\,.$$

- **Théorème de Stokes :**



Soit $\mathcal{S}$ une surface, délimitée par le contour (fermé) $\mathcal{C}_\mathcal{S}$. La surface et son contour sont orientés par la règle de la main droite. Alors,

$$\iint_\mathcal{S} (\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A})\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \oint_{\mathcal{C}_\mathcal{S}} \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}\,.$$