BLAISE PASCAL
PT 2021-2022

Fiche outil

Développements limités

Plan du cours

Au programme

Extrait du programme officiel de PTSI : appendice 2 « Outils mathématiques », bloc 3 « Fonctions ».

Notions et contenus	Capacités exigibles
Développements limités.	Utiliser la formule de Taylor à l'ordre 1 ou 2. L'interpréter graphiquement. Connaître et utiliser les développements limités à l'ordre 1 des fonctions $(1+x)^\alpha$, e^x, $\ln(1+x)$, $\sin x$ et $\tan x$ et à l'ordre 2 de $\cos x$.

En **gras**, les points devant faire l'objet d'une approche expérimentale.

Extrait du programme officiel de PT : appendice 2 « Outils mathématiques », bloc 1 « Calcul différentiel ».

Les capacités relatives à la notion de différentielle d'une fonction de plusieurs variables sont limitées à l'essentiel, elles sont mobilisées principalement dans le cours de thermodynamique ; les fondements feront l'objet d'une étude dans le cadre du chapitre « calcul différentiel » du cours de mathématique.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Différentielle d'une fonction de plusieurs variables. Dérivée partielle.	Connaître l'expression de la différentielle en fonction des dérivées partielles. Identifier la valeur d'une dérivée partielle, l'expression de la différentielle étant donnée.

En **gras**, les points devant faire l'objet d'une approche expérimentale.

I - Formule de Taylor

▷ Écriture en mathématiques : h est un paramètre variable tendant vers 0, et a un réel fixé.

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)\,h + o(h)\,.$$

▷ Écriture en physique : $\mathrm{d}x$ est une variation infinitésimale de la coordonnée x.

$$T(x+\mathrm{d}x) = T(x) + \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + o(\mathrm{d}x)\,,$$

où sur cet exemple $T(x)$ désigne la température au point d'abscisse x. Très souvent, pour ne pas dire systématiquement, le terme $o(\mathrm{d}x)$ est sous-entendu et on écrit simplement

$$\boxed{T(x+\mathrm{d}x) = T(x) + \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\,.}$$

▷ Fonctions de plusieurs variables : dans le cas où la température T peut dépendre de l'espace et du temps, on a au premier ordre en $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}t$

$$\boxed{T(x+\mathrm{d}x, t+\mathrm{d}t) = T(x,t) + \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_t \mathrm{d}x + \left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|_x \mathrm{d}t\,,}$$

qui fait intervenir les dérivées partielles à t et x fixés.

II - Développements limités

II.A - Ceux qu'il faut connaître

Attention ! Ces développements limités de référence ne s'appliquent que pour un paramètre x sans dimension tendant vers 0. Leur utilisation avec des grandeurs physiques dimensionnées peut donc parfois donner lieu à quelques complications.

▷ Exponentielle et logarithme : au premier ordre, et pour x très petit,

$$\boxed{\mathrm{e}^x \simeq 1 + x \qquad \text{et} \qquad \ln(1+x) \simeq x\,.}$$

▷ Fonctions trigonométriques : pour x très petit,

$$\boxed{\cos(x) \simeq 1 - \frac{x^2}{2} \qquad \sin(x) \simeq x \qquad \tan(x) \simeq x\,.}$$

▷ Puissance : au premier ordre, et pour x très petit,

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x\,.}$$

Le cas $\alpha = -1$ permet de retrouver le développement limité de $1/(1+x)$.

▷ Raisonner par parité (c'est-à-dire poser $x' = -x$) permet de retrouver d'autre développements limités, par exemple $(1-x)^2 \simeq 1 - 2x$.

II.B - Comment les utiliser ?

Pour réaliser un développement limité en physique,
il faut toujours se ramener à un paramètre sans dimension et tendant vers 0.

Utiliser la formule de Taylor est possible mais généralement laborieux, il est préférable de procéder par factorisation et d'identifier un développement limité de référence.

> ***Exemple :*** *La capacité d'un condensateur plan est reliée à la distance d entre ses armatures par la relation*
>
> $$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$
>
> *avec S la surface des armatures et ε_0 une constante physique. Dans un capteur capacitif, on fait varier la distance entre armatures d'une quantité x à mesurer supposée très inférieure à la distance au repos d_0.*

La capacité du capteur vaut donc

$$C(x) = \frac{\varepsilon_0 S}{d_0 + x}\,.$$

Pour simplifier cette expression par un développement limité au premier ordre, il faut faire apparaître par factorisation le paramètre sans dimension $X = x/d_0 \ll 1$:

$$C(x) = \frac{\varepsilon_0 S}{d_0\left(1 + \dfrac{x}{d_0}\right)} = \frac{\varepsilon_0 S}{d_0} \times \frac{1}{1+X}\,.$$

On utilise ensuite un développement limité de référence :

$$C(x) = \frac{\varepsilon_0 S}{d_0} \times (1 - X)$$

et on peut enfin revenir aux notations physiques et procéder à d'éventuelles simplifications,

$$C(x) = \frac{\varepsilon_0 S}{d_0}\left(1 - \frac{x}{d_0}\right)\,.$$

III - Différentielle

III.A - Fonction d'une seule variable

Qualitativement [1], on appelle **différentielle** de la fonction f sa variation sous l'effet d'une variation infinitésimale $\mathrm{d}x$ de sa variable :

$$\boxed{\mathrm{d}f = f(x + \mathrm{d}x) - f(x)\,.}$$

Au premier ordre en $\mathrm{d}x$ et d'après la formule de Taylor,

$$\boxed{\mathrm{d}f = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\,.}$$

L'écriture est analogue à une simplification de fraction.

III.B - Fonction de plusieurs variables

Considérons le cas d'une fonction de deux variables. Dans la même logique que précédemment, on appelle différentielle de la fonction f sa variation sous l'effet d'une variation infinitésimale $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$ de ses variables :

$$\boxed{\mathrm{d}f = f(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y) - f(x, y)\,.}$$

En utilisant de nouveau la formule de Taylor,

$$\boxed{\mathrm{d}f = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_y \mathrm{d}x + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_x \mathrm{d}y\,.}$$

On voit apparaître les dérivées partielles de f : calculer les dérivées partielles permet de calculer $\mathrm{d}f$, mais à l'inverse connaître l'expression de $\mathrm{d}f$ en fonction de $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$ permet d'identifier les expressions des dérivées partielles, ce qui peut être utile dans certaines applications formelles.

1. Une définition rigoureuse sera donnée en cours de mathématiques.