BLAISE PASCAL
PT 2021-2022

Fiche outil

Équations différentielles

Extrait du programme officiel de PTSI : appendice 2 « Outils mathématiques », bloc 2 « Équations différentielles ».

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
Équations différentielles linéaires à coefficients constants.	Identifier l'ordre. Mettre l'équation sous forme canonique.
Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants : $y' + ay = f(x)$.	Connaître la solution générale de l'équation sans second membre (équation homogène). Trouver l'expression des solutions lorsque $f(x)$ est constante ou de la forme $A\cos(\omega x+\phi)$ en utilisant la notation complexe.
Équations différentielles linéaires du deuxième ordre à coefficients constants : $y'' + ay' + by = f(x)$.	Utiliser l'équation caractéristique pour trouver la solution générale de l'équation sans second membre. Prévoir le caractère borné ou non de ses solutions (critère de stabilité). Trouver l'expression des solutions lorsque $f(x)$ est constante ou de la forme $A\,e^{\lambda x}$ avec λ complexe. Trouver la solution de l'équation complète correspondant à des conditions initiales données. Représenter graphiquement cette solution.
Autres équations différentielles d'ordre 1 ou 2.	Intégrer numériquement avec un outil fourni. Obtenir une intégrale première d'une équation de Newton $x'' = f(x)$ et l'exploiter graphiquement. Séparer les variables d'une équation du premier ordre à variables séparables. Faire le lien entre les conditions initiales et le graphe de la solution correspondante.

En **gras**, les points devant faire l'objet d'une approche expérimentale.

Équation différentielle linéaire à coeffs constants ?
La grandeur cherchée u, ses dérivées, et un forçage $f(t)$. Pas de carré, sinus, racine, etc., de la grandeur.

Mise sous forme canonique :
Préfacteur 1 devant la dérivée la plus élevée,
Paramètres caractéristiques :
τ, ω_0, Q, etc.

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u = f(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + {\omega_0}^2 u = f(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} - \frac{1}{\tau^2}u = f(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 u = f(t)$$

Solution particulière u_P :
Décrit le régime permanent
donc de même type que le forçage.
Se trouve directement sur l'équation différentielle.

+

Solution homogène u_H :
Décrit le régime transitoire.
Connue par cœur à partir de la forme canonique.

$A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$

$A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) = U_\mathrm{m}\cos(\omega_0 t + \varphi)$

$A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + B\,\mathrm{e}^{+t/\tau}$

Discriminant du polynôme caractéristique
$\Delta < 0 \Rightarrow [A\cos(\omega_\mathrm{p} t) + B\sin(\omega_\mathrm{p} t)]\,\mathrm{e}^{-\mu t}$
$\Delta = 0 \Rightarrow (A + Bt)\,\mathrm{e}^{rt}$
$\Delta > 0 \Rightarrow A\,\mathrm{e}^{r_1 t} + B\,\mathrm{e}^{r_2 t}$

Détermination des constantes :
Identification de la solution
(et sa dérivée si ordre 2)
avec les conditions initiales.

Le nombre de conditions intiales
nécessaires est égal
à l'ordre de l'équation.

Attention les constantes
se déterminent sur la solution complète.

(s'applique aussi si coefficients constants, mais rarement utile)

Équation différentielle non-linéaire ou à coefficients variables ?

si ordre 1

Séparation des variables :
À gauche ce qui dépend de u, à droite ce qui dépend de t,
Souvent pratique de mettre les constantes avec t ;
Intégration et calcul de la primitive.

Attention aux bornes d'intégration :
côté gauche de u_0 à $u(t)$, côté droit de 0 à t.

Conditions initiales à déterminer au préalable
car elles interviennent dans les bornes de l'intégrale.

autres cas

pas de méthode
à connaître,
suivre l'énoncé.