Électronique PTSI

Exercice 1 : Condensateur alimenté par deux générateurs

oral CCP MP | 2 | 1 |

▷ *Équation différentielle du premier ordre ;*
▷ *Puissance électrique.*

1 Raisonnons avec les notations de la figure 1 pour $t > 0$.

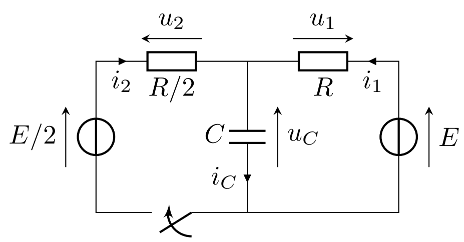


Figure 1 – Condensateur alimenté par deux générateurs.

Loi des nœuds : $$i_C = i_1 + i_2$$

Lois de comportement : $$C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{2u_1}{R} + \frac{u_2}{R}$$

Loi des mailles : $$C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 2\,\frac{E/2 - u_C}{R} + \frac{E - u_C}{R}$$

Donc $$C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{2E}{R} - \frac{3}{R}u_C$$

Finalement : $$\boxed{\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{3}{RC}u_C = \frac{2E}{RC}\,.}$$

2 Pour la résoudre, écrivons l'équation sous forme canonique en posant $\tau = RC/3$,

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u_C = \frac{2E}{RC}\,.$$

Forme générale des solutions :

▷ Solution particulière : le forçage est constant donc la solution particulière aussi, donc en injectant dans l'équation différentielle

$$0 + \frac{3}{RC}u_\mathrm{p} = \frac{2E}{RC} \qquad \text{d'où} \qquad u_\mathrm{p} = \frac{2}{3}E\,.$$

▷ Solution homogène : $u_\mathrm{h} = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$.

▷ Conclusion :

$$u_C(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{2}{3}E\,.$$

Condition initiale : À l'instant $t = 0^-$, le régime est permanent continu et le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert. D'après la loi des nœuds,

$$i_1(0^-) + i_2(0^-) = i_C(0^-) \qquad \text{soit} \qquad i_1(0^-) + 0 = 0$$

La loi des mailles donne alors

$$u_C(0^-) + Ri_1(0^-) = E \qquad \text{d'où} \qquad u_C(0^-) = E$$

Par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur, on déduit

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = E\,.$$

Détermination de la constante d'intégration :

$$u_C(0^+) \underbrace{=}_{\text{sol}} A + \frac{2}{3}E \underbrace{=}_{\text{CI}} E \qquad \text{d'où} \qquad A = \frac{E}{3}\,.$$

Conclusion :

$$\boxed{u_C(t) = \frac{E}{3}\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{2}{3}E}$$

3 La tension u_C est décroissante. Ainsi, la valeur finale est atteinte à 1 % près à l'instant t_1 tel que

$$u_C(t_1) = \frac{101}{100} \times \frac{2}{3}E\,.$$

Cherchons t_1 :

$$\frac{E}{3}\,\mathrm{e}^{-t_1/\tau} + \frac{2}{3}E = \frac{101}{100} \times \frac{2}{3}E$$

donc $$\mathrm{e}^{-t_1/\tau} + 2 = 2 \times \frac{101}{100}$$

soit $$\mathrm{e}^{-t_1/\tau} = 0{,}02$$

d'où $$\boxed{t_1 = -\tau \ln 0{,}02 = 3{,}9\,\tau\,.}$$

> *Le fait de trouver ici environ 4τ n'est pas contradictoire avec le fait qu'il faille un temps 5τ pour réaliser 99 % du transitoire. On s'intéresse ici à la* valeur finale, *mais pas à* l'amplitude de l'échelon *de tension. La condition initiale fait qu'on atteint la valeur finale à 1 % près avant d'avoir réalisé 99 % de l'échelon de tension.*

4 L'énergie dissipée l'est par effet Joule dans les résistances. La puissance dissipée dans la résistance R vaut

$$\mathcal{P}_1 = \frac{u_1^2}{R} = \frac{(E-u_C)^2}{R} = \frac{E^2}{9R}\left(e^{-t/\tau} - 1\right)^2\,.$$

De même, la puissance dissipée dans la résistance $R/2$ vaut

$$\mathcal{P}_2 = \frac{u_2^2}{R/2} = 2\frac{\left(\dfrac{E}{2} - u_C\right)^2}{R} = 2\frac{E^2}{9R}\left(e^{-t/\tau} - \frac{1}{2}\right)^2\,.$$

La puissance totale dissipée vaut donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{\text{diss}} &= \frac{E^2}{9R}\left(e^{-t/\tau} - 1\right)^2 + 2\frac{E^2}{9R}\left(e^{-t/\tau} - \frac{1}{2}\right)^2 \\
&= \frac{E^2}{9R}\left[\left(\mathrm{e}^{-2t/\tau} - 2\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + 1\right) + 2\left(\mathrm{e}^{-2t/\tau} - \mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{1}{4}\right)\right]
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{P}_{\text{diss}} = \frac{E^2}{9R}\left[3\,\mathrm{e}^{-2t/\tau} - 4\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{3}{2}\right]\,.}$$

Lorsque $t \to \infty$, la puissance dissipée tend vers

$$\mathcal{P}_\infty = \frac{E^2}{9R} \times \frac{3}{2} = \frac{E^2}{6R}\,.$$

Cette valeur correspond à la puissance dissipée par une résistance $3R/2$ alimentée par une tension $E/2$. Cette valeur est logique : en régime continu, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert, si bien que les autres dipôles apparaissent montés en série. Les deux générateurs s'associent alors en un seul de fém $E/2$ (attention au sens) et les deux résistances sont équivalentes à $3R/2$.

Exercice 2 : Circuit RL à deux mailles

oral Mines-Télécom PSI | 3 | 2

- ▷ *Équation différentielle du premier ordre ;*
- ▷ *Recherche de condition initiale.*

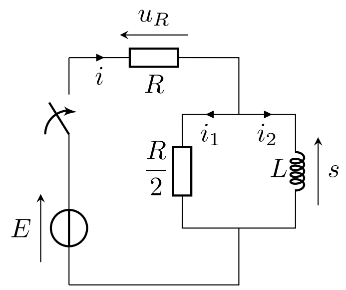


Figure 2 – Notations pour l'étude du circuit RL à deux mailles.

- **Équation différentielle vérifiée par s**

▷ *Première méthode : approche temporelle*

Avec les notations de la figure 2,

$$
\begin{aligned}
&\text{Loi des nœuds :} & i &= i_1 + i_2 \\
&\text{Dérivation :} & \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\
&\text{Lois de comportement :} & \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t} &= \frac{2}{R}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{s}{L} \\
&\text{Loi des mailles :} & \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E-s) &= \frac{2}{R}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{s}{L} \\
& & -\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} &= \frac{2}{R}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{s}{L} \\
& & \frac{3}{R}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{s}{L} &= 0 \\
&\text{Finalement :} & &\boxed{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{3L}s = 0}
\end{aligned}
$$

ce que l'on peut mettre sous forme canonique :

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}s = 0 \qquad \text{avec} \qquad \tau = \frac{3L}{R}\,.$$

> ***Rappel de méthode :*** *Comme on veut utiliser la loi de comportement de la bobine, mais qu'elle implique une dérivée, alors on dérive l'équation de travail au préalable.*

▷ *Deuxième méthode : approche fréquentielle*

L'association de la bobine et de la résistance $R/2$ a pour admittance équivalente

$$\underline{Y_{\text{éq}}} = \frac{2}{R} + \frac{1}{\mathrm{j}L\omega}\,.$$

On identifie alors un pont diviseur de tension entre cette admittance équivalente et la résistance R,

$$\frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{\underline{Z_{\text{éq}}}}{\underline{Z_{\text{éq}}} + R} = \frac{1}{1 + R\underline{Y_{\text{éq}}}}$$

d'où on déduit

$$\left(1 + R\underline{Y_{\text{éq}}}\right)\underline{S} = \underline{E} \qquad \text{soit} \qquad 3\underline{S} + \frac{R}{\mathrm{j}L\omega}\underline{S} = \underline{E}\,.$$

Pour pouvoir identifier à une équation différentielle, il faut écrire cette relation sous forme d'un polynôme en $\mathrm{j}\omega$,

$$3\mathrm{j}\omega\,\underline{S} + \frac{R}{L}\underline{S} = \mathrm{j}\omega\underline{E} \qquad \text{d'où} \qquad 3\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}s = \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}\,.$$

Comme $e = E = \text{cte}$ la dérivée est toujours nulle et on en déduit la forme canonique

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{3L}s = 0\,.}$$

> ***Moralité :*** *L'approche fréquentielle suivie de l'identification est souvent plus simple, mais il faut bien se rappeler simplifier e lorsqu'elle est constante.*

- **Forme générale des solutions**

L'équation est homogène, il n'y a donc pas de solution particulière (ou autrement dit cette solution est nulle). Seule reste la solution homogène, donc

$$s(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,,$$

avec A une constante.

- **Détermination de la condition initiale**

▷ *Étude à l'instant $t = 0^-$:* la seule grandeur continue est i_2 (courant dans une bobine), il n'y a donc qu'elle qu'on détermine. Comme le régime est permanent continu et que la branche contenant le seul générateur du circuit est ouverte, on a directement

$$i_2(0^-) = 0\,.$$

▷ *Étude à l'instant $t = 0^+$:*

Loi des nœuds : $i(0^+) = i_1(0^+) + i_2(0^+)$

Continuité de i_2 : $i(0^+) = i_1(0^+)$

Lois de comportement : $\dfrac{u_R(0^+)}{R} = \dfrac{2s(0^+)}{R}$

Loi des mailles : $\dfrac{E - s(0^+)}{R} = \dfrac{2s(0^+)}{R}$

Donc : $E = 3s(0^+)$

Finalement : $\boxed{s(0^+) = \dfrac{E}{3}\,.}$

> ***Rappel de méthode :*** *Il est* ***absolument inutile*** *de déterminer à $t = 0^-$ une grandeur qui n'est pas continue, et ce même si c'est la grandeur d'intérêt. Comme elle n'est pas continue, sa valeur à 0^- ne nous renseigne* ***pas du tout*** *sur sa valeur à 0^+. Ainsi, les seules grandeurs à déterminer à 0^- sont les grandeurs continues : tension aux bornes d'un condensateur et courant dans une bobine.*
>
> *Rappelons également il n'y a pas de méthode fréquentielle pour déterminer une condition initiale !*

- **Détermination de la constante A**

$$s(0^+) \underbrace{=}_{\text{CI}} \frac{E}{3} \underbrace{=}_{\text{sol}} A \qquad \text{donc} \qquad A = \frac{E}{3}\,.$$

- **Conclusion**

$$\boxed{s(t) = \frac{E}{3}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,.}$$

La courbe est représentée figure 3.

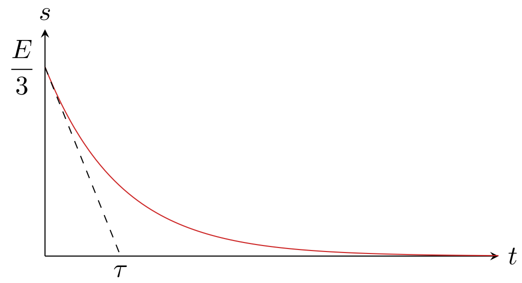
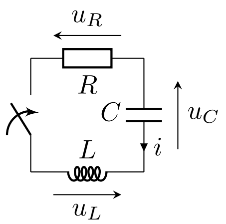


Figure 3 – Courbe représentant la tension s en fonction du temps.

Exercice 3 : RLC série en régime libre

oral CCINP PSI | 1 | 2

▷ *Équation différentielle du second ordre ;*
▷ *Montage expérimental.*



Les notations des courants et tensions ne sont pas explicitées sur le schéma par l'énoncé, auquel cas il est sous-entendu que toutes les tensions sont orientées de façon cohérente avec u_C et que les dipôles sont orientés en convention récepteur.

1 L'intensité i est continue car elle traverse une bobine. Ainsi,

$$\boxed{i(0^+) = i(0^-) = 0}$$

car le circuit est ouvert à $t < 0$. De même, la tension u_C est nécessairement continue car aux bornes du condensateur donc

$$\boxed{u_C(0^+) = u_C(0^-) = U_0}$$

Enfin, la tension aux bornes de la bobine se déduit de la loi des mailles à l'instant $t = 0^+$ et de la loi d'Ohm,

$$u_R(0^+) + u_C(0^+) + u_L(0^+) = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{u_L(0^+) = -u_C(0^+) = -U_0\,.}$$

En régime permanent, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert donc

$$\boxed{i_\infty = 0\,.}$$

La bobine est équivalente à un fil, si bien que

$$\boxed{u_{L,\infty} = 0}$$

et d'après la loi des mailles on en déduit

$$u_{R,\infty} + u_{C,\infty} + u_{L,\infty} = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{u_{C,\infty} = 0\,.}$$

2 D'après le comportement à $t = 0$, on en déduit que **la grandeur y correspond à l'intensité i**. Un oscilloscope ne peut pas mesurer directement une intensité, il faut donc mesurer une tension qui lui est proportionnelle, c'est-à-dire la tension aux bornes de la résistance. Obtenir la courbe représentant y en fonction de t demande donc **de brancher l'oscilloscope en parallèle de la résistance**.

> *Ici, il n'y a aucun appareil branché sur le secteur type GBF, donc pas de conflit de masse à craindre.*

3 D'après la loi des mailles,

$$u_R + u_C + u_L = 0 \qquad \text{soit} \qquad Ri + u_C + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$$

en utilisant les lois de comportement. Pour pouvoir relier u_C à i, il est nécessaire dériver,

$$R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} = 0 \qquad \text{d'où} \qquad R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}i + L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} = 0\,.$$

Écrivons maintenant cette équation sous forme canonique pour faire apparaître les paramètres cherchés,

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC} i = 0\,.$$

On identifie alors $1/LC = {\omega_0}^2$ et $R/L = 2m\omega_0$ d'où

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + 2m\omega_0 \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 i = 0\,.}$$

$\boxed{4}$ **Forme générale des solutions :** L'équation différentielle est homogène, il n'y a donc pas de solution particulière à déterminer (une autre formulation possible est de dire qu'elle est nulle). Pour déterminer la forme générale de la solution homogène, trouvons les racines du polynôme caractéristique,

$$r^2 + 2m\omega_0\, r + {\omega_0}^2 = 0\,.$$

Son discriminant vaut

$$4m^2{\omega_0}^2 - 4{\omega_0}^2 = 4{\omega_0}^2(m^2-1) < 0$$

car $m < 1$. Ainsi, les racines sont complexes conjuguées et valent

$$r_\pm = -\frac{2m\omega_0}{2} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{4{\omega_0}^2(1-m^2)}}{2} = -m\omega_0 \pm \mathrm{i}\omega_0\sqrt{1-m^2} = -m\omega_0 \pm \mathrm{i}\Omega\,.$$

Comme le discriminant de l'équation caractéristique est négatif alors le régime est pseudo-périodique et les solutions s'écrivent toutes sous la forme

$$i(t) = [A\cos\Omega t + B\sin\Omega t]\,\mathrm{e}^{-m\omega_0 t}$$

Conditions initiales : Déterminons maintenant les conditions initiales nécessaires pour trouver les constantes A et B. D'après la question 1,

$$i(0^+) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) = \frac{1}{L}u_L(0^+) = -\frac{U_0}{L}\,.$$

Constantes d'intégration : Ainsi, la condition initiale sur i donne

$$i(0^+) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{sol}}}{=} A \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CI}}}{=} 0\,.$$

En considérant directement $A = 0$ pour calculer la dérivée,

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = B\Omega\cos(\Omega t)\,\mathrm{e}^{-m\omega_0 t} - m\omega_0 B\sin(\Omega t)\,\mathrm{e}^{-m\omega_0 t}$$

donc

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{sol}}}{=} B\Omega \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CI}}}{=} -\frac{U_0}{L} \qquad \text{d'où} \qquad B = -\frac{U_0}{L\Omega}\,.$$

Conclusion :

$$\boxed{i(t) = -\frac{U_0}{L\Omega}\sin(\Omega t)\,\mathrm{e}^{-m\omega_0 t}\,.}$$

L'intensité est pseudo-périodique, et **Ω est sa pseudo-période.** On peut l'évaluer à partir de la pseudo-période T' lisible sur la courbe. Par exemple, $T' = t_2 - t_1$ d'où

$$\boxed{\Omega = \frac{2\pi}{t_2 - t_1}\,.}$$

$\boxed{5}$ Trouver la position des maxima n'est pas simple du tout à cause de l'amortissement exponentiel, qui complique beaucoup la recherche des zéros de la dérivée. Cependant, compte tenu de la courbe donnée, on peut faire l'approximation que la position des maxima est directement donnée par ceux du sinus car l'amortissement est faible. Ainsi, le k-ième maximum est atteint lorsque

$$\Omega t_k = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad \text{soit} \qquad t = \frac{3}{4}T' + (k-1)T'$$

avec k un entier. y_1 et y_2 correspondent aux deux premiers maxima, aux instants $t_1 = 3T'/4$ et $t_2 = 7T'/4$. Ainsi,

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{\mathrm{e}^{-7m\omega_0 T'/4}}{\mathrm{e}^{-3m\omega_0 T'/4}} = \mathrm{e}^{-m\omega_0 T'}$$

Pour aboutir à une relation encore plus simple (je ne sais pas ce qu'attendait l'examinateur, qui l'aurait précisé au candidat au cour de l'oral) , on peut supposer $m \ll 1$, auquel cas $\Omega \sim \omega_0$ et donc $T' \simeq 2\pi/\omega_0$. Dans ce cas,

$$\boxed{\frac{y_2}{y_1} \simeq \mathrm{e}^{-2\pi m}\,.}$$

Exercice 4 : Filtrage d'un signal

oral banque PT | 2 | 1

▷ *Décomposition de Fourier ;*
▷ *Signal de sortie d'un filtre.*

1 Voir figure 4.

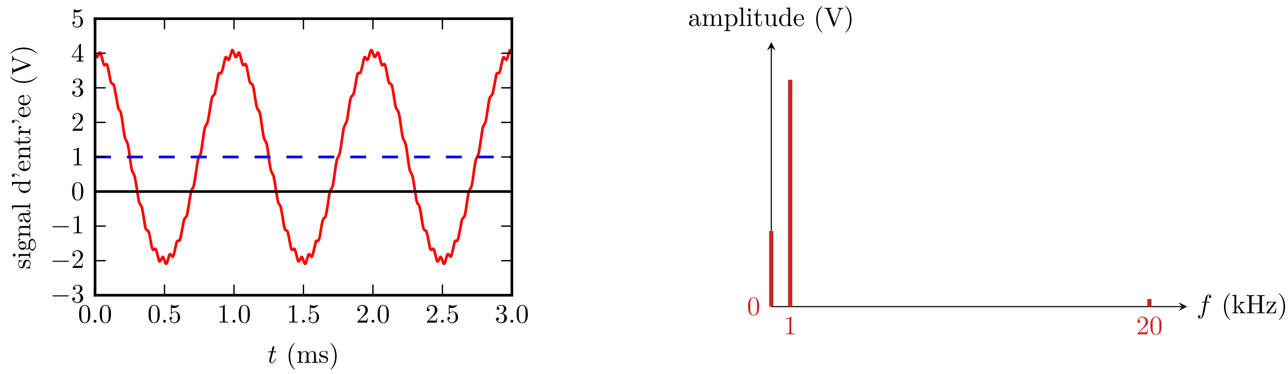


Figure 4 – Signal d'entrée.

2 En posant $f = 1\,\mathrm{kHz}$ et $A = 1\,\mathrm{V}$, le signal d'entrée s'écrit

$$\boxed{e(t) = A + 3A\cos(2\pi f t) + \frac{A}{10}\cos\left(40\pi f t + \frac{\pi}{2}\right)\,.}$$

3 Voir figure 5. Sans plus de précision, les filtres sont supposés idéaux, c'est-à-dire qu'ils transmettent (resp. coupent) parfaitement les composantes qui appartiennent (resp. qui n'appartiennent pas) à leur bande passante, et de gain unité dans leur bande passante.

Exercice 5 : Filtre passe-haut d'ordre 2

1 | 1 |

▷ *Fonction de transfert ;*
▷ *Diagramme de Bode.*

1 Analysons qualitativement les régimes asymptotiques.
▷ à très basse fréquence, la bobine est équivalente à un fil donc $\underline{S} = 0$;
▷ à très haute fréquence la bobine est équivalente à un interrupteur ouvert, ce qui empêche tout courant de parcourir le circuit. Comme par le condensateur est équivalent à un fil, on déduit de la loi des mailles $\underline{S} = \underline{E}$.

Conclusion : il s'agit bien d'un **filtre passe-haut**.

2 D'après la relation du pont diviseur de tension,

$$\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{\mathrm{j}L\omega}{R + \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega} + \mathrm{j}L\omega} = \frac{\mathrm{j}\dfrac{L}{R}\omega}{1 + \dfrac{1}{\mathrm{j}RC\omega} + \mathrm{j}\dfrac{L}{R}\omega}$$

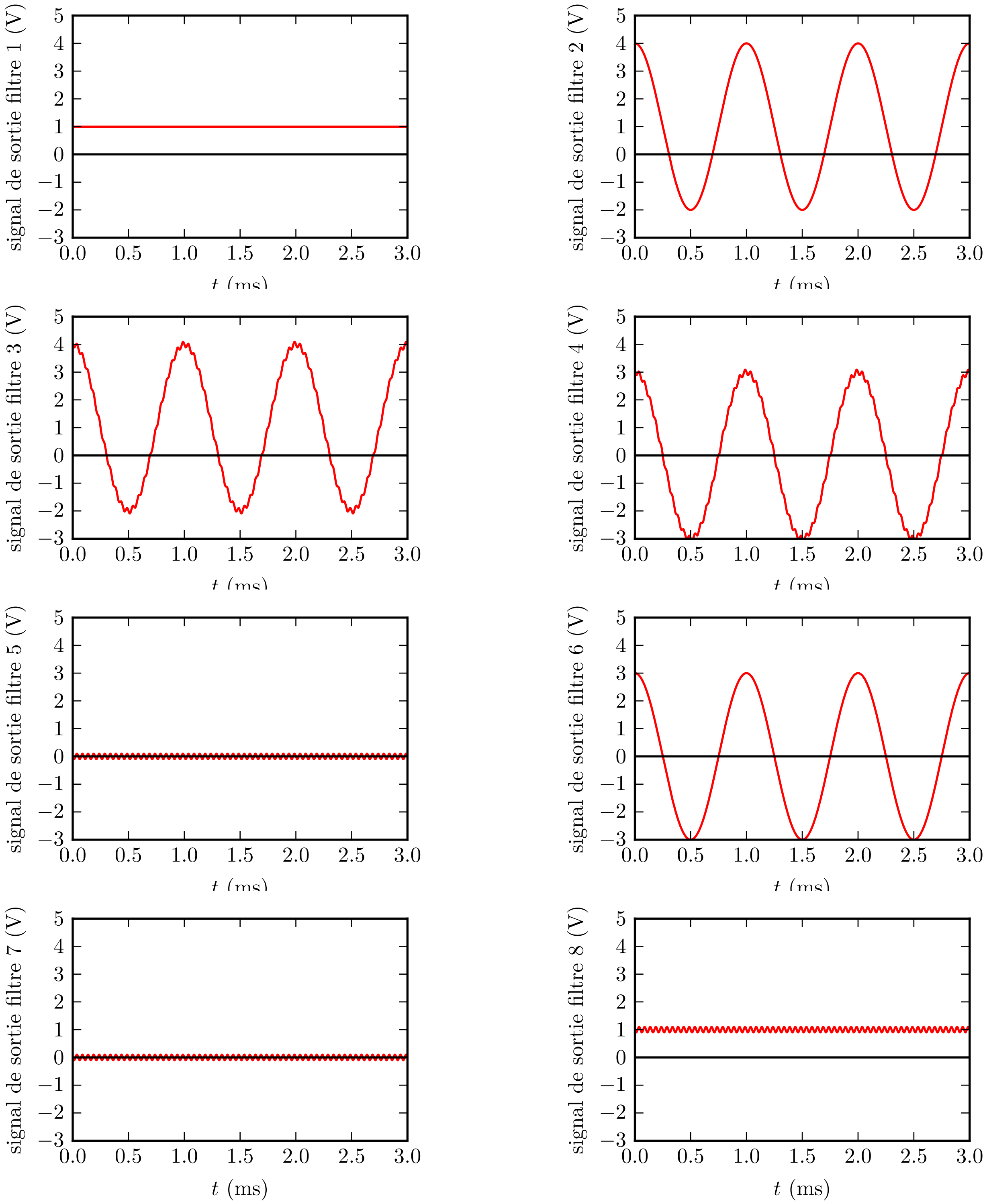


Figure 5 – Signaux de sortie des différents filtres.

Pour faire apparaître la forme souhaitée, on multiplie le numérateur et le dénominateur par $1 = \omega_0/\omega_0$, ce qui permet d'écrire

$$\underline{H} = \frac{\mathrm{j}\dfrac{L\omega_0}{R}x}{1 + \dfrac{1}{\mathrm{j}RC\omega_0 x} + \mathrm{j}\dfrac{L\omega_0}{R}x}$$

Comme pour ce circuit RLC série $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ et $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, on en identifie

$$\frac{L\omega_0}{R} = \frac{L}{R\sqrt{LC}} = Q \qquad \text{et} \qquad RC\omega_0 = \frac{RC}{\sqrt{LC}} = R\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{Q}\,.$$

ce qui permet enfin de faire apparaître la forme souhaitée,

$$\boxed{\underline{H} = \frac{\mathrm{j}Qx}{1 + \mathrm{j}Q\left(x - \frac{1}{x}\right)}}$$

3 Simplifions la fonction de transfert dans les deux limites asymptotiques. À très basse fréquence ($\omega \ll \omega_0$ ou $x \ll 1$),

$$\underline{H} \sim \frac{\mathrm{j}Qx}{-\mathrm{j}Q/x} \sim -x^2 \qquad \text{donc} \qquad G_{\mathrm{dB}} \sim 20\log x^2 = 40\log x$$

La pente de l'asymptote très basse fréquence est donc de $+40$ dB/décade. De même, dans la limite très haute fréquence $x \gg 1$,

$$\underline{H} \sim \frac{\mathrm{j}Qx}{\mathrm{j}Qx} \sim 1 \qquad \text{donc} \qquad G_{\mathrm{dB}} \sim 0$$

L'asymptote très haute fréquence est donc horizontale. Le diagramme de Bode asymptotique et le diagramme de Bode réel (tracé pour $Q = 1/2 < 1/\sqrt{2}$) sont représentés figure 6.

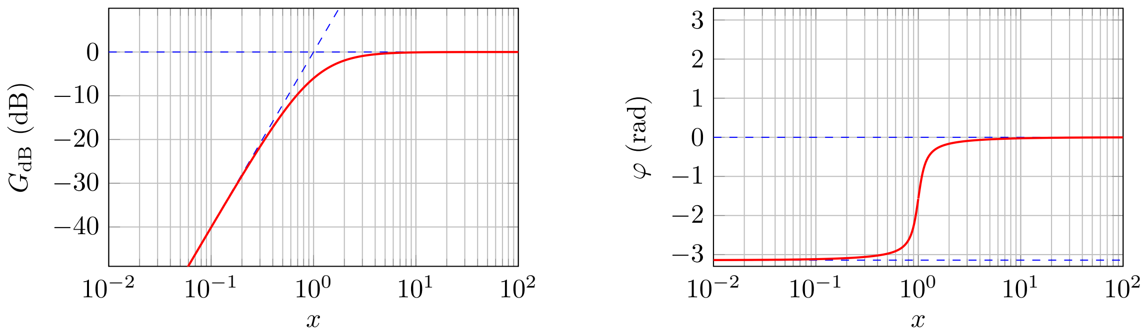


Figure 6 – **Diagramme de Bode du filtre RLC passe-haut d'ordre 2.** Tracé pour $Q = 1/2$, diagramme de Bode en phase ajouté pour information.

4 Le comportement intégrateur ou dérivateur d'un filtre se traduit en termes de diagramme de Bode par une asymptote de pente ± 20 dB/décade, ce qui n'est pas le cas ici : **il n'existe aucun domaine de fréquence dans lequel ce filtre a un comportement d'intégrateur ou de dérivateur**.

Exercice 6 : Modélisation d'un récepteur radio

oral banque PT | 1 | 1

▷ *Fonction de transfert ;*
▷ *Caractéristiques d'un filtre, gabarit.*

1 Le récepteur doit réaliser un **filtrage passe-bande**. La tension de sortie doit donc être mesurée **aux bornes de la résistance**, voir figure 7. En effet,

▷ dans la limite très basse fréquence, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert donc $\underline{I} = 0$ donc d'après la loi d'Ohm $\underline{S} = 0$;
▷ dans la limite très haute fréquence, c'est cette fois la bobine qui est équivalente à un interrupteur ouvert donc on a de même $\underline{S} = 0$.

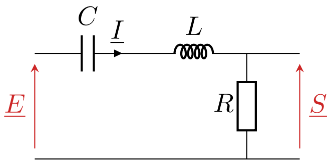


Figure 7 – Modèle de récepteur radio.

2 Le condensateur et la bobine montés en série sont équivalents à une impédance

$$\underline{Z}_{LC} = \mathrm{j}L\omega + \frac{1}{\mathrm{j}C\omega}\,.$$

En identifiant un pont diviseur de tension,

$$\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{R}{R + \underline{Z}_{LC}} = \frac{1}{1 + \dfrac{\underline{Z}_{LC}}{R}}$$

soit en remplaçant

$$\boxed{\underline{H} = \frac{1}{1 + \dfrac{\mathrm{j}L\omega}{R} + \dfrac{1}{\mathrm{j}RC\omega}}\,.}$$

3 Un critère possible serait que la fréquence centrale f_0 du passe-bande doit être incluse dans la bande de fréquence que l'on cherche à capter. En utilisant les résultats connus sur le RLC série,

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\,,$$

et ainsi

$$f_0 > f_1 = 150\,\mathrm{kHz} \qquad \text{donc} \qquad 2\pi\sqrt{LC} < \frac{1}{f_1} \qquad \text{d'où} \qquad C < \frac{1}{4\pi^2 {f_1}^2 L} = 9{,}8\cdot 10^{-10}\,\mathrm{F}$$

et de même

$$f_0 < f_2 = 300\,\mathrm{kHz} \qquad \text{donc} \qquad 2\pi\sqrt{LC} > \frac{1}{f_2} \qquad \text{d'où} \qquad C > \frac{1}{4\pi^2 {f_2}^2 L} = 2{,}4\cdot 10^{-10}\,\mathrm{F}\,.$$

Ainsi,

$$\boxed{0{,}24\,\mathrm{nF} < C < 0{,}98\,\mathrm{nF}\,.}$$

Exercice 7 : Étude d'un filtre

oral CCINP MP | 3 | 2

- *Comportement asymptotique d'un filtre ;*
- *Signal de sortie d'un filtre.*

1 • **Première méthode : raisonnement par équivalence de dipôles**

Limite très basse fréquence : les deux condensateurs équivalent à des interrupteurs ouverts, seules demeurent les résistances, d'où par un pont diviseur de tension

$$\underline{H} \underset{\mathrm{TBF}}{\sim} \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{1 + \dfrac{R_1}{R_2}}\,,$$

et ainsi

$$G_{\mathrm{dB}} = 20\log|\underline{H}| = -20\log 1 + \frac{R_1}{R_2}\,.$$

Comme le gain basse fréquence vaut $-20\,\mathrm{dB}$, on en déduit

$$1 + \frac{R_1}{R_2} = 10 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{R_2 = \frac{R_1}{9} = 10\,\mathrm{k\Omega}\,.}$$

Limite très haute fréquence : l'admittance de chaque bloc RC parallèle s'écrit

$$\underline{Y}_{RC} = \mathrm{j}C\omega + \frac{1}{R} \simeq \mathrm{j}C\omega\,.$$

Les deux blocs se comportent donc chacun comme le condensateur, la résistance joue un rôle négligeable.

> *Utiliser « comme toujours » l'équivalence entre un condensateur et un fil pose ici problème, car cela donnerait $u_s = 0$, en contradiction avec le diagramme de Bode, et pire encore $u_e = 0$ alors que c'est la tension imposée depuis l'extérieur par l'utilisateur du filtre. En réalité, l'approximation usuelle $\underline{Z_C} \simeq 0$ signifie que l'impédance du condensateur est très faible devant l'autre impédance du pont diviseur ... mais comme ici cette deuxième impédance est aussi un condensateur, aucune des deux n'est négligeable.*

Par un pont diviseur de tension,

$$\underline{H} \underset{\text{THF}}{\sim} \frac{1/\mathrm{j}C_2\omega}{1/\mathrm{j}C_1\omega + 1/\mathrm{j}C_2\omega} = \frac{1}{1 + \dfrac{C_2}{C_1}}\,,$$

et de même

$$G_{\text{dB}} = -20\log\left(1 + \frac{C_2}{C_1}\right)\,.$$

Comme le gain haute fréquence vaut $-80\,\text{dB}$, on en déduit

$$1 + \frac{C_2}{C_1} = 10^4 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{C_2 \simeq 10^4 \times C_1 = 100\,\mu\text{F}\,.}$$

- **Deuxième méthode : calcul explicite de la fonction de transfert**

  Posons

$$\underline{Z_{1,2}} = \frac{1}{\mathrm{j}C_{1,2}\omega + \dfrac{1}{R_{1,2}}} = \frac{R_{1,2}}{1 + \mathrm{j}R_{1,2}C_{1,2}\omega}\,.$$

Avec un pont diviseur,

$$\underline{H} = \frac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}} = \frac{1}{1 + \dfrac{\underline{Z_1}}{\underline{Z_2}}} \qquad \text{d'où} \qquad \underline{H} = \frac{1}{1 + \dfrac{R_1}{R_2} \times \dfrac{1 + \mathrm{j}R_2C_2\omega}{1 + \mathrm{j}R_1C_1\omega}}\,.$$

On en déduit les équivalents en haute et basse fréquence,

$$\underline{H} \underset{\text{BF}}{\sim} \frac{1}{1 + \dfrac{R_1}{R_2}} \qquad \text{et} \qquad \underline{H} \underset{\text{HF}}{\sim} \frac{1}{1 + \dfrac{R_1}{R_2} \times \dfrac{\mathrm{j}R_2C_2\omega}{\mathrm{j}R_1C_1\omega}} = \frac{1}{1 + \dfrac{C_2}{C_1}}$$

qui sont (heureusement !) identiques à ceux trouvés précédemment et s'exploitent de la même façon.

> *Dans le contexte d'un oral de concours, il est (je trouve) naturel que le candidat pense en premier lieu à un raisonnement par équivalence de dipôles ... et c'est ensuite par discussion avec l'examinateur que ce raisonnement est « amélioré » ou que le candidat est orienté vers le calcul explicite de $\underline{H}$.*

2 Entre $100\,\text{Hz}$ et $100\,\text{kHz}$, le gain du filtre diminue de $60\,\text{dB}$ en trois décades, ce qui donne une pente de $-20\,\text{dB/décade}$ caractéristique d'un **comportement intégrateur**.

3 Le signal d'entrée est ainsi la somme de deux signaux harmoniques de fréquences $2f$ et $4f$ ($f = 1\,\text{kHz}$),

$$u_\text{e}(t) = E_0\cos(4\pi f t) + \frac{2}{3}E_0\cos(8\pi f t) \qquad \text{avec} \qquad E_0 = 6\,\text{V}\,.$$

> *Il s'agit donc d'un signal sans fondamental.*

À partir du diagramme de Bode donné dans l'énoncé, on estime l'équation de la droite oblique dans le domaine intermédiaire par

$$G_{\text{dB}}(f) = -20\log\frac{f}{f_0}\,,$$

avec une ordonnée à l'origine nulle comme le montre le cas $\log(f/f_0) = 1$. On en déduit

$$|\underline{H}(f)| = 10^{G_{\text{dB}}/20} = 10^{-\log(f/f_0)} = \frac{1}{f/f_0}\,.$$

> *On peut aussi partir du résultat (à connaître !) qu'une pente de −20 dB/décade est caractéristique*

> *d'un comportement intégrateur, dont la fonction de transfert asymptotique prend la forme*
>
> $$\underline{H} = \frac{H_0}{jf/f_0}$$
>
> *On constate graphiquement que si* $f = f_0$ $(\log(f/f_0) = 0)$ *alors* $G_{\mathrm{dB}} = 0$ *donc* $H_0 = 1$. *Bien sûr, le résultat donné par cette méthode est cohérent avec la précédente.*

Ainsi,

$$\underline{s} = f_0 \frac{\underline{e}}{\mathrm{j}f} = 2\pi f_0 \frac{\underline{e}}{\mathrm{j}\omega} \qquad \text{d'où} \qquad s(t) = 2\pi f_0 \int e(t')\,\mathrm{d}t' \,.$$

On obtient donc

$$u_\mathrm{s}(t) = E_0 \frac{2\pi f_0}{4\pi f} \sin(4\pi f t) + \frac{2}{3} E_0 \frac{2\pi f_0}{8\pi f} \sin(8\pi f t)$$

$$\text{soit} \qquad \boxed{u_\mathrm{s}(t) = \underbrace{E_0 \frac{f_0}{2f}}_{=S_2} \sin(4\pi f t) + \underbrace{E_0 \frac{f_0}{6f}}_{=S_4} \sin(8\pi f t) \,,}$$

et comme $f_0/f = 1 \cdot 10^{-2}$ on a numériquement

$$S_2 = 3 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{V} \qquad \text{et} \qquad S_4 = 1 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{V} \,.$$

4 Posons $E_0' = 10\,\mathrm{V}$, ce qui permet d'écrire

$$u_\mathrm{e}(t) = E_0' \cos(2\pi f_1 t) + E_0' \cos(2\pi f_2 t)$$

En se référant au seul diagramme asymptotique (ce qui est discutable car les déphasages sont non négligeables), on a pour la première harmonique

$$G_{\mathrm{dB}}(f_1) = -20\,\mathrm{dB} \qquad \text{soit} \qquad |\underline{H}(f_1)| = 10^{-20/20} = \frac{1}{10}$$

et pour la deuxième

$$|\underline{H}(f_2)| = 10^{-80/20} = \frac{1}{10\,000} \,.$$

La seconde harmonique contribue de manière négligeable au signal de sortie, d'où

$$\boxed{u_\mathrm{s}(t) \simeq \frac{E_0'}{10} \cos(2\pi f_1 t) \,.}$$