





Théorèmes de la mécanique

Exercice 1 : Vibration d'une molécule de monoxyde de carbone

💡 1 | ✂ 2 | Ⓞ

-  ▷ Force exercée par un ressort ;
 ▷ Oscillateur harmonique.

1 L'atome de carbone n'est soumis qu'à la force exercée par le ressort. Comme on le constate facilement sur la figure 1, sa longueur instantanée est $L = x_2 - x_1$, donc

$$\vec{F}_C = -k(x_2 - x_1 - L_0)(-\vec{e}_x) = +k(x_2 - x_1 - L_0)\vec{e}_x.$$

Par application du PFD dans un référentiel galiléen (qu'on ne précisera pas!) et en projetant, on obtient

$$m_1\ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1 - L_0). \quad (1)$$

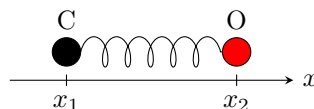


Figure 1 – Molécule de monoxyde de carbone.

2 De même, la force exercée par le ressort sur l'atome d'oxygène vaut

$$\vec{F}_O = -k(x_2 - x_1 - L_0)(+\vec{e}_x) = -k(x_2 - x_1 - L_0)\vec{e}_x.$$

et ainsi

$$m_2\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1 - L_0). \quad (2)$$

3 Par combinaison linéaire,

$$\begin{aligned} \frac{(1) + (2)}{m_1 + m_2} &\iff \frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{d^2x_2}{dt^2} = \frac{k}{m_1 + m_2}(x_2 - x_1 - L_0) - \frac{k}{m_1 + m_2}(x_2 - x_1 - L_0) \\ &\iff \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} x_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} x_2 \right) = 0 \\ &\iff \frac{d^2\sigma}{dt^2} = 0 \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \frac{(2)}{m_2} - \frac{(1)}{m_1} &\iff \frac{d^2x_2}{dt^2} - \frac{d^2x_1}{dt^2} = -\frac{k}{m_2}(x_2 - x_1 - L_0) - \frac{k}{m_1}(x_2 - x_1 - L_0) \\ &\iff \frac{d^2(x_2 - x_1)}{dt^2} = -k \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) (x_2 - x_1 - \ell_0) \\ &\iff \frac{d^2\delta}{dt^2} = -\frac{k}{\mu}(\delta - \ell_0). \end{aligned}$$

4 • Expression de σ : raisonnons par intégrations successives,

$$\ddot{\sigma} = 0 \quad \text{donc} \quad \dot{\sigma} = A = \text{cte.}$$

À l'instant initial,

$$\dot{\sigma}(t=0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{=} \frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{x}_1(t=0) + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{x}_2(t=0) = 0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sol}}}{=} A \quad \text{d'où} \quad A = 0.$$

Ainsi,

$$\dot{\sigma} = 0 \quad \text{donc} \quad \sigma = B = \text{cte.}$$

À l'instant initial,

$$\sigma(t=0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{=} \frac{m_1}{m_1 + m_2} X_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} X_2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sol}}}{=} B$$

Finalement,

$$\sigma = \frac{m_1}{m_1 + m_2} X_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} X_2.$$

• **Expression de δ** : l'équation différentielle vérifiée par δ est celle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{k/\mu}$ et dont $\delta = \ell_0$ est une solution particulière. Ainsi,

$$\delta(t) = \ell_0 + A' \cos(\omega_0 t) + B' \sin(\omega_0 t).$$

À l'instant initial,

$$\delta(t=0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{=} X_2 - X_1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{expr}}}{=} \ell_0 + A' + 0 \quad \text{d'où} \quad A' = X_2 - X_1 - \ell_0.$$

La deuxième condition initiale porte sur la dérivée $\dot{\delta}$, qui est donnée par

$$\dot{\delta} = -A' \omega_0 \sin(\omega_0 t) + B' \omega_0 \cos(\omega_0 t).$$

À l'instant initial,

$$\dot{\delta}(t=0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{=} \dot{x}_2(t=0) - \dot{x}_1(t=0) = 0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{expr}}}{=} 0 + B' \quad \text{d'où} \quad B' = 0.$$

Finalement,

$$\delta(t) = \ell_0 + (X_2 - X_1 - \ell_0) \cos(\omega_0 t).$$

• **Expressions de x_1 et x_2** : il suffit de renverser le changement de variables pour exprimer x_1 et x_2 en fonction de σ et δ , et de remplacer. À vous de jouer !

5 En identifiant la fréquence des oscillations à celle de l'onde électromagnétique,

$$\nu \underset{\substack{\uparrow \\ \text{EM}}}{=} \frac{c}{\lambda} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{méca}}}{=} \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

on en déduit

$$k = 4\pi^2 \mu \frac{c^2}{\lambda^2}.$$

La masse d'un atome de carbone vaut $m_1 = M_C/\mathcal{N}_A$, de même pour l'oxygène, et ainsi

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{M_C M_O}{(M_C + M_O)\mathcal{N}_A} = 1,1 \cdot 10^{-26} \text{ kg}.$$

Ainsi,

$$k = 1,9 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}.$$

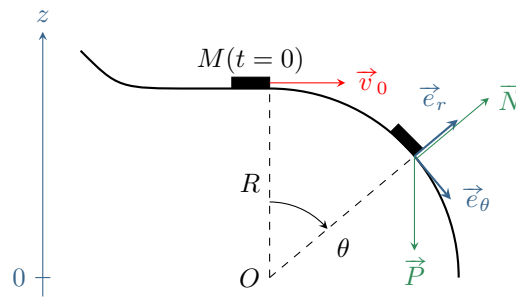


Figure 2 – Schéma des notations.

Exercice 2 : Une luge sur une bosse



- ▷ Énergie mécanique ;
- ▷ Décollage d'un support.

1 Appliquons le théorème de la résultante cinétique à la luge, en mouvement par rapport au référentiel terrestre que l'on considère galiléen. On se place dans le repère polaire de centre O défini figure 2. La luge est soumise son poids,

$$\vec{P} = m\vec{g} = -mg \cos \theta \vec{e}_r + mg \sin \theta \vec{e}_\theta,$$

et à la force de réaction de la piste,

$$\vec{N} = N \vec{e}_r \quad \text{avec} \quad N > 0.$$

Ainsi, par application de la loi de la quantité de mouvement dans le référentiel terrestre,

$$m \vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{P} + \vec{N}$$

et comme

$$\vec{OM} = R \vec{e}_r \quad \text{alors} \quad \vec{v} = R \dot{\theta} \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{a} = -R \dot{\theta}^2 \vec{e}_r + R \ddot{\theta} \vec{e}_\theta$$

En projetant sur \vec{e}_r , on en déduit

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -mR\dot{\theta}^2 = -mg \cos \theta + N \quad \text{d'où} \quad \boxed{N = -mR\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta.}$$

2 Pour faire apparaître la vitesse initiale au lieu de $\dot{\theta}$, utilisons la conservation de l'énergie mécanique. En effet, la luge n'est soumise qu'à une force conservative (son poids) et à une force qui ne travaille pas (la réaction de la piste). Exprimons l'énergie potentielle de pesanteur de la luge. Comme l'axe z est ascendant et en prenant l'origine des énergies potentielles en $z = 0$, alors

$$E_{pp} = mgz = mgR \cos \theta.$$

De plus, la vitesse de la luge a pour norme $v = R\dot{\theta}$, donc son énergie cinétique vaut

$$E_c = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2.$$

Finalement, son énergie mécanique vaut

$$E_m = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + mgR \cos \theta.$$

Cette quantité est constante, égale à sa valeur initiale,

$$E_m = \frac{1}{2} m v_0^2 + mgR$$

Par identification, on en déduit

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + mgR = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + mgR \cos \theta$$

ce qui permet d'isoler le terme à remplacer dans l'expression de N ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 &= \frac{1}{2} m v_0^2 + mgR(1 - \cos \theta) \\ -mR\dot{\theta}^2 &= -\frac{m v_0^2}{R} + 2mg(\cos \theta - 1). \end{aligned}$$

On en déduit finalement

$$N = -\frac{mv_0^2}{R} + mg(3 \cos \theta - 2).$$

3 La luge quitte la piste si la force de réaction s'annule, c'est-à-dire pour un angle θ_d tel que $N(\theta_d) = 0$, soit

$$0 = -\frac{mv_0^2}{R} + mg(3 \cos \theta_d - 2) \quad \text{d'où} \quad \theta_d = \arccos\left(\frac{v_0^2}{3gR} + \frac{2}{3}\right).$$

Si la vitesse de la luge est faible, à la limite $v_0 \simeq 0$, cet angle est bien défini et vaut $\arccos 2/3$. Ainsi, **la luge quitte la piste quelle que soit sa vitesse initiale.**

4 Pour que l'arccosinus soit défini, il faut que son argument soit inférieur à 1, c'est-à-dire

$$\frac{v_0^2}{3gR} + \frac{2}{3} \leq 1 \quad \text{soit} \quad v_0^2 \leq 3gR \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) \quad \text{donc} \quad v_0 < \sqrt{gR} = v_{\text{lim}}.$$

Si $v_0 > v_{\text{lim}}$, les équations établies dans les questions précédentes indiquent que la norme de la force de réaction \vec{N} serait toujours négative, quelle que soit la valeur de θ . Cela n'a pas de sens, et signifie que l'hypothèse utilisée pour les établir (contact entre la luge et la piste) est fautive. Par conséquent, on en déduit qu'il n'y a jamais de contact : **la luge quitte la piste dès $\theta = 0$** , et elle suit une trajectoire parabolique (chute libre).

Exercice 3 : Balourd

oral banque PT | 💡 2 | ✂ 3



▷ Moment cinétique ;

▷ Oscillations autour d'une position d'équilibre.

1 Deux types de mouvement sont possibles :

▷ si m est suffisamment faible, alors le poids du balourd suffit à compenser celui de la masse et il existe une position d'équilibre ;

▷ si m est trop élevée, alors le poids de la masse entraîne le cylindre en rotation et le fil se déroule complètement.

Le moment du poids du balourd est maximal pour $\theta = \pi/2$, voir figure 3. Dans cette situation, en utilisant les bras de levier pour calculer les moments par rapport à Ox ,

$$\mathcal{M}_{b,\text{max}} + \mathcal{M}_m = -Mgd + m_cga = 0 \quad \text{soit} \quad m_c = M \frac{d}{a}.$$

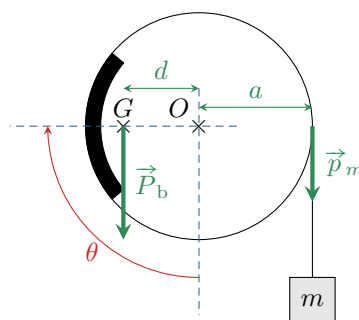


Figure 3 – Position d'équilibre lorsque $m = m_c$.

En appliquant le théorème de la résultante cinétique à la masse m puis en supposant que le fil transmet parfaitement les efforts, on peut montrer que la force exercée par le fil sur le cylindre vaut en fait

$$\vec{F} = m\vec{g} + m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

avec \vec{v} la vitesse de la masse m . On suppose ici son accélération suffisamment faible devant \vec{g} pour la négliger.

2 Évidemment, on suppose $m < m_c$. Le point d'application de \vec{p}_m ne dépend pas de θ , donc son moment par rapport à (Ox) vaut toujours

$$\mathcal{M}_m = mga.$$

Le moment du poids du balourd vaut

$$\mathcal{M}_b = (\vec{OG} \wedge \vec{P}_b) \cdot \vec{e}_x = -Mgd \sin \theta$$

Dans la position d'équilibre, ces deux moments se compensent donc

$$-Mgd \sin \theta_e + mga = 0 \quad \text{d'où} \quad \theta_e = \arcsin \frac{ma}{Md}.$$

On retrouve la condition d'existence de la position d'équilibre : pour qu'elle soit définie, il faut

$$ma < Md \quad \text{soit} \quad m < \frac{Md}{a} = m_c.$$

3 D'après le théorème du moment cinétique,

$$J\ddot{\theta} = -Mgd \sin \theta + mga$$

On se place au voisinage de la position d'équilibre : on pose donc

$$\theta = \theta_e + \varepsilon \quad \text{avec} \quad \varepsilon \ll 1.$$

On peut alors faire un développement limité du sinus :

$$\sin(\theta_e + \varepsilon) \simeq \sin \theta_e + \varepsilon \cos \theta_e.$$

Il s'agit ni plus ni moins de la formule de Taylor,

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + \dots$$

Attention au développement limité : ce n'est pas l'angle θ qui est faible, mais bien l'écart ε . Il est donc a priori faux de faire un développement limité par rapport à θ .

L'équation différentielle devient

$$J\ddot{\varepsilon} + Mgd \cos \theta_e \varepsilon = -Mgd \sin \theta_e + mga,$$

et compte tenu de l'expression de $\sin \theta_e$ obtenue à la question précédente on obtient

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{Mgd \cos \theta_e}{J} \varepsilon = 0.$$

Il est normal de trouver un second membre nul : l'équation différentielle porte sur l'écart à la position d'équilibre, qui est par définition nul lorsque le système est à l'équilibre.

On reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre

$$\omega_0^2 = \frac{Mgd \cos \theta_e}{J} = \frac{Mgd \sqrt{1 - \left(\frac{ma}{Md}\right)^2}}{Ma^2} = \frac{g}{Ma^2} \sqrt{M^2 d^2 - m^2 a^2}$$

d'où on déduit la période des oscillations

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{Ma^2}{g \sqrt{M^2 d^2 - m^2 a^2}}}.$$

Exercice 4 : Distributeur de plateaux

💡 3 | ✂ 1



- ▷ Résolution de problème ;
- ▷ Force exercée par un ressort ;
- ▷ Ordres de grandeur de la vie courante.

Supposons que le distributeur porte N plateaux, tous d'épaisseur $e = 1$ cm et de masse $m = 200$ g. Quelle que soit la valeur de N , le sommet de la pile de plateaux se trouve $h = 10$ cm sous le point d'attache des ressorts. On néglige le poids du support à plateaux devant celui des plateaux. Comme les plateaux sont évidemment immobiles (...) alors la force exercée par « le » ressort doit compenser le poids des plateaux, ce qui se traduit par

$$k(Ne + h - \ell_0) = Nmg \quad \text{soit} \quad k(h - \ell_0) + N(ke - mg) = 0$$

Cette condition devant être vérifiée pour toute valeur de N , on en déduit les deux égalités

$$\begin{cases} k(h - \ell_0) = 0 \\ ke - mg = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \ell_0 = h = 10 \text{ cm} \\ k = \frac{mg}{e} = 200 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} \end{cases}$$

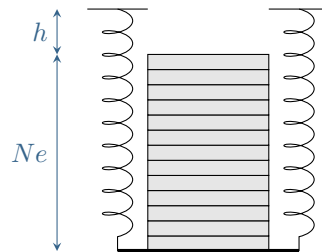


Figure 4 – Distributeur de plateaux.

Pour identifier le système d'équations, on peut également raisonner d'abord sur le cas $N = 0$ qui donne la première équation du système, puis simplifier l'équation issue du PFD, et en déduire la deuxième équation du système.