BLAISE PASCAL
PT 2021-2022

Fiche de révisions R6 *Correction*

Particules chargées
Satellites et planètes

Exercice 1 : Modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène

1 | 2 |

▷ *Caractéristiques d'une orbite circulaire ;*
▷ *Énergie mécanique.*

1 Le proton exerce une force de Coulomb attractive sur l'électron. Dans un repérage polaire dans le plan du mouvement,

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{e^2}{4\pi\,\varepsilon_0\,r^2}\,\vec{u}_r\,.}$$

Comme cette force est conservative, alors l'énergie potentielle dont elle dérive est telle que

$$\vec{F} = -\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}r}\,\vec{u}_r$$

ce qui conduit à

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}r} = \frac{e^2}{4\pi\,\varepsilon_0\,r^2} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{E_\mathrm{p}(r) = -\frac{e^2}{4\pi\,\varepsilon_0\,r}}$$

en prenant comme référence $E_\mathrm{p}(r\to\infty) = 0$.

2 L'électron en mouvement par rapport à un référentiel lié au proton. Son poids est négligeable devant la force électrique exercée par le proton, ce qui a été justifié dans le chapitre sur les particules chargées. D'après la loi de la quantité de mouvement appliquée à l'électron en mouvement circulaire,

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

ce qui donne en projection sur $\vec{u}_r$

$$-mr\dot\theta^2 = -\frac{e^2}{4\pi\,\varepsilon_0\,r^2}\,.$$

Or $\dot\theta^2 = v^2/r^2$, d'où

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\,\varepsilon_0\,r^2}\,,$$

et ainsi

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\,\varepsilon_0\,m\,r}}\,.}$$

L'énergie mécanique s'écrit alors

$$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}\,m\,v^2 - \frac{e^2}{4\pi\,\varepsilon_0\,r} = \frac{e^2}{8\pi\,\varepsilon_0\,r} - \frac{e^2}{4\pi\,\varepsilon_0\,r} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{E_\mathrm{m} = -\frac{e^2}{8\pi\,\varepsilon_0\,r}}$$

3 D'après la question précédente,

$$E_\mathrm{p} = 2E_\mathrm{m}\,.$$

> *Comme $E_\mathrm{m} < 0$ il n'y a pas de contradiction !*

4 Comme l'orbite de l'électron est circulaire, son vecteur vitesse est orthoradial alors que son vecteur position est radial. Les deux vecteurs sont donc perpendiculaires. La norme du moment cinétique de l'électron évalué en P vaut donc

$$L_P = r_n \times m v_n \qquad \text{soit} \qquad \boxed{L_P = \sqrt{\frac{m\,e^2\,r_n}{4\pi\,\varepsilon_0}}\,.}$$

5 L'hypothèse de quantification de Bohr indique que

$$\sqrt{\frac{m\,e^2\,r_n}{4\pi\,\varepsilon_0}} = n\hbar \qquad \text{soit} \qquad \frac{m\,e^2\,r_n}{4\pi\,\varepsilon_0} = n^2\hbar^2$$

et ainsi

$$\boxed{r_n = \frac{4\pi\,\varepsilon_0\,\hbar^2}{m\,e^2}\,n^2\,.}$$

6 Connaissant r_n, on en déduit les valeurs permises pour l'énergie mécanique,

$$E_n = -\frac{e^2}{8\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{m\,e^2}{4\pi\,\varepsilon_0\,\hbar^2\,n^2} \qquad \text{soit} \qquad E_n = -\frac{E_0}{n^2} \qquad \text{avec} \qquad \boxed{E_0 = \frac{m\,e^4}{32\pi^2{\varepsilon_0}^2\hbar^2} = 13{,}6\,\mathrm{eV}}$$

7 Repartons de la condition de quantification du moment cinétique,

$$L_P = m\,r_n\,v_n = n\hbar\,.$$

En utilisant la relation de de Bröglie, $v_n = h/m\lambda_n$,

$$m\,r_n\,\frac{h}{m\lambda_n} = n\hbar$$

d'où le résultat annoncé,

$$\boxed{2\pi\,r_n = n\lambda_n\,.}$$

La longueur $2\pi r_n$ correspond au périmètre de l'orbite circulaire, qui doit ici correspondre à un nombre entier de longueurs d'ondes de de Bröglie : c'est une condition de type **résonance d'onde stationnaires**.

Exercice 2 : Gravity

exemple officiel CCINP | 2 | 2 |

- *Loi de Kepler ;*
- *Orbite circulaire et elliptique ;*
- *Conservation de l'énergie mécanique.*

1 Dans un repère polaire de centre O le centre de la Terre,

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{\mathcal{G}M_0 m}{r^2}\vec{e}_r \qquad \text{et} \qquad E_\mathrm{p} = -\frac{\mathcal{G}M_0 m}{r}\,.}$$

2 Pour un système en rotation uniforme, $r = \text{cte}$ donc $\dot{r} = 0$ et $\ddot{r} = 0$ et $v = r\dot{\theta} = 0$ donc $\ddot{\theta} = 0$. Le PFD dans la base polaire s'écrit donc

$$-m\frac{v^2}{r}\vec{e}_r = -\frac{\mathcal{G}M_0 m}{r^2}\vec{e}_r \qquad \text{soit} \qquad v^2 = \frac{\mathcal{G}M_0}{r}\,.$$

Or le mouvement est par hypothèse circulaire de rayon r et uniforme de période T, donc $v = 2\pi r/T$ et

$$\frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \frac{\mathcal{G}M_0}{r}$$

ce qui conduit à la troisième loi de Kepler pour l'orbite circulaire,

$$\boxed{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{M_0\mathcal{G}}}$$

L'énergie mécanique de l'astronaute vaut alors

$$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mathcal{G}M_0 m}{r} = \frac{1}{2}m\frac{\mathcal{G}M_0}{r} - \frac{\mathcal{G}M_0 m}{r} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{E_\mathrm{m} = -\frac{\mathcal{G}M_0 m}{2r}\,.}$$

3 D'après la troisième loi de Kepler,

$$\frac{{T_\mathrm{S}}^2}{r_\mathrm{S}^3} = \frac{{T_\mathrm{H}}^2}{r_\mathrm{H}^3} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{T_\mathrm{S} = T_\mathrm{H}\left(\frac{r_\mathrm{S}}{r_\mathrm{H}}\right)^{3/2} = 93\,\mathrm{min}.}$$

On a par ailleurs

$$\boxed{v_\mathrm{H} = \frac{2\pi r_\mathrm{H}}{T_\mathrm{H}} = 7{,}6\cdot 10^3\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \qquad \text{et} \qquad v_\mathrm{S} = \frac{2\pi r_\mathrm{S}}{T_\mathrm{S}} = 7{,}7\cdot 10^3\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.}$$

(la différence n'apparaît que sur le troisième chiffre significatif ... mais l'énoncé n'en donne que deux pour T_H).

4 Voir figure 1. Le centre de la Terre est forcément l'un des foyers de l'ellipse, d'après la première loi de Kepler.

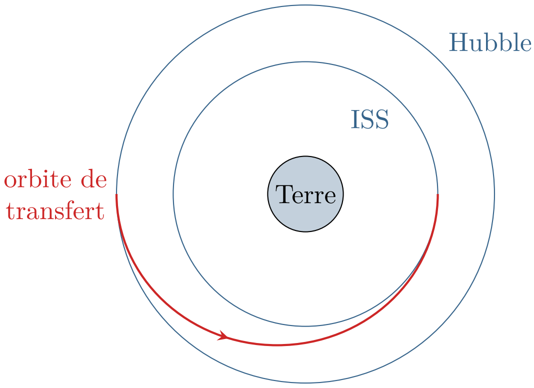

Figure 1 – Orbite de transfert. Les deux orbites de Hubble et de l'ISS sont représentées en bleu, l'orbite de transfert en rouge. Évidemment, la figure n'est pas à l'échelle ... Version couleur sur le site de la classe.

5 L'énergie mécanique en orbite elliptique prend la même forme qu'en orbite circulaire en remplaçant le rayon par le demi-grand axe a (résultat admis dans le cours). Ici, $2a = r_\mathrm{S} + r_\mathrm{H}$, d'où on déduit

$$\boxed{E_\mathrm{m} = -\frac{\mathcal{G}M_0 m}{r_\mathrm{S} + r_\mathrm{H}}}$$

6 À l'apogée, l'astronaute est à distance r_H du centre de la Terre, donc

$$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}mv_\mathrm{apo}^2 - \frac{\mathcal{G}M_0 m}{r_\mathrm{H}} = -\frac{\mathcal{G}M_0 m}{r_\mathrm{S} + r_\mathrm{H}}$$

ce qui donne

$$v_\mathrm{apo}^2 = \frac{2\mathcal{G}M_0 r_\mathrm{S}}{r_\mathrm{H}(r_\mathrm{S} + r_\mathrm{H})}$$

et en utilisant la troisième loi de Kepler pour faire apparaître la période à la place de $M_0\mathcal{G}$

$$v_\mathrm{apo}^2 = \frac{2r_\mathrm{S} \times 4\pi^2 r_\mathrm{H}^3}{r_\mathrm{H}(r_\mathrm{S} + r_\mathrm{H}) \times T_\mathrm{H}^2} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{v_\mathrm{apo} = \frac{2\pi r_\mathrm{H}}{T_\mathrm{H}}\sqrt{\frac{2r_\mathrm{S}}{r_\mathrm{S} + r_\mathrm{H}}} = 7{,}5\cdot 10^3\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.}$$

Par analogie (et en vérifiant que le raisonnement se transpose sans problème !),

$$\boxed{v_\text{pér} = \frac{2\pi r_\mathrm{S}}{T_\mathrm{S}}\sqrt{\frac{2r_\mathrm{H}}{r_\mathrm{S} + r_\mathrm{H}}} = 7{,}7\cdot 10^3\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.}$$

Pour le contrôle de la vitesse, je ne sais pas trop comment l'astronaute peut faire. Les satellites utilisent des moteurs, mais je ne suis pas sûr que l'astronaute en ait !

7 Même sur l'orbite de transfert, l'astronaute n'est soumis qu'à la force exercée par la Terre, et son mouvement vérifie la troisième loi de Kepler. Ainsi, la période T_{transf} à laquelle il parcourt l'orbite de transfert est reliée au demi-grand axe $a = r_S + r_H$ par

$$\frac{{T_{\text{transf}}}^2}{\left(\dfrac{r_S + r_H}{2}\right)^3} = \frac{4\pi^2}{M_0 \mathcal{G}} = \frac{{T_H}^2}{{r_H}^3}\,.$$

Par ailleurs l'astronaute ne parcourt que la moitié de l'orbite : le voyage prend une durée $\Delta t = T_{\text{transf}}/2$, d'où

$$\frac{8 \times 4\,\Delta t^2}{(r_S + r_H)^3} = \frac{{T_H}^2}{{r_H}^3} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\Delta t = \frac{T_H}{\sqrt{32}}\left(1 + \frac{r_S}{r_H}\right)^{3/2} = 47\,\text{min}\,.}$$

> *Notez que cette durée est celle pour passer de l'orbite de Hubble à celle de l'ISS ... mais pas pour atteindre l'ISS. Sauf coup de chance, l'opération est d'ailleurs mal engagée pour les astronautes : comme la vitesse ne dépend pas de la masse mais que de la distance au centre de la Terre, tous les corps sur la même orbite vont à la même vitesse. À moins d'arriver sur l'orbite juste au bon moment (et c'est comme par hasard ce qui arrive dans le film), les astronautes n'ont aucune chance de rattraper ou d'être rattrapés par l'ISS.*

Exercice 3 : Spectrométrie de masse — 2 | 2 |

- *Mouvement dans un champ électrostatique ;*
- *Mouvement cyclotron.*

A - Accélération des ions

1 L'ion mercure Hg^{2+} est un cation, chargé positivement. Son énergie potentielle électrostatique $2eV(x)$ est minimale lorsque le potentiel est minimal. Pour que l'ion soit accéléré, il faut donc que **la plaque P_2 soit portée à un potentiel inférieur à la plaque P_1**.

2 L'ion n'est soumis qu'à la force de Lorentz électrique, qui dérive de l'énergie potentielle $E_{\text{pe}} = 2eV$ où V est le potentiel électrique. Ainsi, son énergie mécanique est conservée, soit en l'exprimant entre les plaques P_1 et P_2

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} m\, v(P_1)^2 + 2e\, V(P_1) &= \frac{1}{2} m\, v(P_2)^2 + 2e\, V(P_2) \\
0 + 2e\, V(P_1) &= \frac{1}{2} m\, v^2 + 2e\, V(P_2) \\
\frac{1}{2} m\, v^2 &= 2e\,[V(P_1) - V(P_2)] \\
&\boxed{v = \sqrt{\frac{4eU}{m}}}
\end{aligned}$$

3 Les deux isotopes ne comptent que deux neutrons de différence, sur un total de 200 : **leur masse diffère donc de à peine 1 %**, et comme de plus elle apparaît sous une racine dans l'expression de v il n'est pas surprenant que l'écart entre les deux vitesses soit très faible.

B - Filtrage en vitesse

4 L'ion ne peut avoir un mouvement rectiligne entre les fentes F_2 et F_3 que si la **résultante des forces qu'il subit est dirigée selon $\vec{e}_x$.**

> *Attention à ne pas confondre mouvement rectiligne « tout court » et mouvement rectiligne uniforme. Rien n'impose ici a priori que la résultante des forces subies par l'ion soit nulle.*

5 L'ion n'est soumis qu'à la force de Lorentz, et son poids est négligeable. Cette force s'écrit

$$\vec{F}_L = 2e\left[\vec{E}_2 + \vec{v} \wedge \vec{B}_2\right] = 2e\,[E_2\,\vec{e}_y + vB_2(\vec{e}_x \wedge \vec{e}_z)] = 2e(E_2 - vB_2)\,\vec{e}_y\,.$$

Comme cette force ne peut pas être dirigée selon $\overrightarrow{e}_x$, on en déduit que l'ion n'a une trajectoire rectiligne que si elle est nulle, c'est-à-dire

$$E_2 - vB_2 = 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{v = v_0 = \frac{E_2}{B_2}\,.}$$

6 En comparant avec les valeurs données question **??**, ce sont les ions les plus lents qui traversent le filtre. D'après la question **??**, ce sont les plus lourds : ce sont donc **les ions de l'isotope 202** qui passent au travers du filtre.

C - Séparation des ions

7 Dans la zone de séparation, l'ion n'est soumis qu'à la force de Lorentz magnétique $\overrightarrow{F_B} = 2e\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$. Comme elle est orthogonale à la vitesse, alors sa puissance est nulle, et d'après le théorème de la puissance cinétique,

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \text{donc} \qquad E_\mathrm{c} = \mathrm{cte} \qquad \text{et} \qquad v = \mathrm{cte} = v_0\,.$$

Le mouvement de l'ion est bien uniforme.

8 Comme la trajectoire est circulaire, on la décrit en coordonnées cylindriques de centre le centre de la trajectoire et d'axe z. D'après le PFD appliqué à l'ion modélisé comme un point matériel,

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{F}_\mathrm{L} \qquad \text{soit} \qquad -m\frac{v_0^2}{R}\overrightarrow{e}_r = 2e\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}_3$$

en utilisant l'expression de l'accélération pour un mouvement circulaire uniforme. Compte tenu de la géométrie du dispositif, on devine que l'ion tourne en sens trigonométrique, sinon il n'atteindrait jamais les collecteurs : on a donc $\overrightarrow{v} = +v_0\overrightarrow{e}_\theta$ car le mouvement est uniforme. On peut le vérifier à partir du sens du champ magnétique $\overrightarrow{B}_3 = -B_3\overrightarrow{e}_z$. Cela permet d'exprimer le produit vectoriel,

$$\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B} = -v_0B_3(\overrightarrow{e}_\theta \wedge \overrightarrow{e}_z) = -v_0B_3\overrightarrow{e}_r\,.$$

On déduit du PFD projeté sur $\overrightarrow{e}_r$

$$m\frac{v_0^2}{R} = 2ev_0B_3 \qquad \text{donc} \qquad R = \frac{mv_0}{2eB_3}\,.$$

En remplaçant v_0 par son expression déterminée à la question 2,

$$R = \sqrt{\frac{m^2}{4e^2B_3^2} \times \frac{4eU}{m}} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{R = \sqrt{\frac{mU}{eB_3^2}}\,.}$$

9 Le rayon est d'autant plus grand que l'ion est massif : on a donc $y_{200} < y_{202}$, d'où on déduit

$$\boxed{y_{200} = 2R_{200} = 143{,}6\,\mathrm{cm} \qquad \text{et} \qquad y_{202} = 2R_{202} = 145{,}0\,\mathrm{cm}\,.}$$

10 La charge totale est proportionnelle au nombre d'ions reçus, puisque chaque ion est chargé $+2e$. On en déduit alors les proportions isotopiques α_{200} et α_{202},

$$\boxed{\alpha_{200} = \frac{Q_1}{Q_1 + Q_2} = 77\,\% \qquad \text{et} \qquad \alpha_{202} = \frac{N_2}{Q_1 + Q_2} = 23\,\%\,.}$$