BLAISE PASCAL
PT 2021-2022

Révisions R6

Particules chargées
Satellites et planètes

Ressources en ligne

Scanner ou cliquer sur les QR-code pour accéder aux ressources.

- **L'essentiel du cours sous forme de cartes mémo :** cartes réalisées par Christophe Cayssiols.

Cartes utilisables pour ce bloc de révisions : thème « mécanique », rubrique « particules chargées ».

- **Qmax : QCM d'applications directes du cours**

Choisir d'abord le mode « j'apprends » puis éventuellement le mode « je révise ». Ces QCM correspondent au programme de PCSI, certaines notions peuvent donc vous être inconnues : me demander en cas de doute.

Thèmes abordés dans ce bloc de révisions : choisir « électromagnétisme » puis « particules chargées dans un champ électromagnétique ».

Rappels de cours

A - Mouvement conservatif dans un potentiel électrostatique

Considérons par exemple un système de deux électrodes planes parallèles (type condensateur), distantes de L le long de l'axe (Ox), soumises à une tension $U = V(0) - V(L)$. Une particule de charge q est lâchée sans vitesse de l'électrode située en $x = 0$, on souhaite qu'elle atteigne la deuxième.

- **Signe de U**

La particule subit la force de Lorentz électrostatique $q\vec{E}$. On rappelle également que $\vec{E}$ est dirigé dans le sens des potentiels décroissants. Ainsi, une charge positive se dirige vers les potentiels décroissants : il faut donc avoir $V(L) < V(0)$ soit $U > 0$. On montre de même qu'il faut avoir $U < 0$ si $q < 0$. Finalement, pour que la particule soit accélérée comme voulu, U doit donc être du même signe que q.

- **Vitesse dans l'espace inter-armatures**

L'évolution du potentiel électrostatique en fonction de x s'obtient à partir de l'équation de Poisson :

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2} = 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad V(x) = Ax + B \qquad \rightsquigarrow \qquad V(x) = V(0) - \frac{U}{L}x$$

On exploite ensuite la conservation de l'énergie mécanique de la particule entre sa position initiale et une position x quelconque :

$$E_\mathrm{m} \underset{x=0}{\underset{\uparrow}{=}} 0 + qV(0) \underset{x\text{ qcq}}{\underset{\uparrow}{=}} \frac{1}{2}mv^2 + qV(x) = \frac{1}{2}mv^2 + qV(0) - q\frac{U}{L}x$$

ce qui conduit à

$$v(x) = \sqrt{\frac{2qU}{mL}x}\,.$$

B - Mouvement cyclotron

Considérons une particule de charge q quelconque, placée dans un champ magnétostatique uniforme $\vec{B} = B\vec{e}_z$, et dont le vecteur vitesse initiale $\vec{v}_0$ est orthogonal au champ magnétique. Le mouvement de la particule dans ces conditions est appelé **mouvement cyclotron**, et les paramètres caractéristiques de ce mouvement sont les **paramètres cyclotron**.

Bilan des actions mécaniques :
- ▷ force de Lorentz magnétique : $\vec{F}_B = q\vec{v} \wedge \vec{B}$;
- ▷ poids négligé de manière systématique pour une particule microscopique.

• Le mouvement est uniforme

D'après le théorème de l'énergie cinétique,

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0 \qquad \text{donc} \qquad E_c = \text{cte} \qquad \text{d'où} \qquad v = ||\vec{v}|| = \text{cte} = v_0\,.$$

Le mouvement cyclotron est uniforme, c'est-à-dire qu'il se fait à vitesse constante.

• Le mouvement est circulaire

D'après le principe fondamental de la dynamique,

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = q\vec{v} \wedge \vec{B} \qquad \text{soit} \qquad \vec{a} = \frac{q}{m}\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Projection sur $\vec{e}_z$: toujours nulle ! Ainsi, $a_z = 0$ donc $v_z = \text{cte} = 0$ car $\vec{v}_0$ est supposée orthogonale à $\vec{B}$.

⇝ le mouvement se fait uniquement dans le plan (Oxy).

Le vecteur $\vec{a}$ est ainsi de norme constante, $\vec{v}$ et $\vec{B}$ sont chacun de norme constante et toujours orthogonaux, et constamment perpendiculaire à la vitesse.

⇝ ces propriétés du vecteur accélération sont caractéristiques d'un mouvement circulaire.

> ***Remarque :*** *La démonstration explicite n'est pas immédiate : la nature circulaire du mouvement cyclotron est donc admise dans le cadre du programme de PTSI/PT.*

Raisonnons graphiquement pour trouver le sens de parcours de ce cercle. Imaginons que la particule passe en un point de sa trajectoire avec une vitesse $\vec{v}$. On construit alors la force magnétique, voir figure 1, ce qui permet d'en déduire la courbure de la trajectoire, et ainsi le sens de parcours.

⇝ une particule de charge positive parcourt la trajectoire en sens horaire ($\dot{\theta} < 0$), une particule de charge négative en sens trigonométrique ($\dot{\theta} > 0$).

Figure 1 – Sens de parcours de la trajectoire dans un champ magnétique constant.

La trajectoire cyclotron est un cercle dont le sens de parcours dépend du signe de la charge.

• Pulsation cyclotron

On appelle **pulsation cyclotron** la (valeur absolue de la) vitesse angulaire de la particule. Elle s'obtient à partir du PFD en faisant apparaître « partout » la vitesse angulaire. Comme le mouvement est circulaire uniforme,

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = q\vec{v} \wedge \vec{B} \quad \rightsquigarrow \quad -m\frac{v^2}{R_c}\vec{e}_r = q(R_c\dot{\theta}\vec{e}_\theta \wedge B\vec{e}_z) \quad \rightsquigarrow \quad -m\frac{{R_c}^2\dot{\theta}^2}{R_c}\vec{e}_r = qR_cB\dot{\theta}\vec{e}_r\,.$$

En simplifiant l'expression ci-dessus, on en déduit

La trajectoire cyclotron est parcourue à la vitesse angulaire $\omega_c = \left|\dot{\theta}\right| = \dfrac{|q|\,B}{m}$.

- **Rayon cyclotron**

On appelle **rayon cyclotron** le rayon de la trajectoire. Il s'obtient à partir du PFD en faisant apparaître « partout » la norme de la vitesse. Comme les écritures dépendent directement du signe de q, on suppose pour simplifier $q > 0$ donc $\dot\theta < 0$ soit $\vec v = -v\,\vec e_\theta$. Comme le mouvement est circulaire uniforme,

$$m\frac{\mathrm{d}\vec v}{\mathrm{d}t} = q\vec v \wedge \vec B \qquad \rightsquigarrow \qquad -m\frac{v^2}{R_\mathrm{c}}\vec e_r = q(-v\,\vec e_\theta \wedge B\,\vec e_z) \qquad \rightsquigarrow \qquad -m\frac{v^2}{R_\mathrm{c}}\vec e_r = -qvB\,\vec e_r\,.$$

En simplifiant cette expression, on en déduit

La trajectoire cyclotron a pour rayon $R_\mathrm{c} = \dfrac{mv}{|q|\,B}$.

- **Lien entre pulsation et rayon cyclotron**

La pulsation et le rayon cyclotron sont reliés de manière très simple :

$$||\vec v|| = R\left|\dot\theta\right| \qquad \rightsquigarrow \qquad v = R_\mathrm{c}\omega_\mathrm{c}$$

Quand on connaît l'un, il est donc inutile de repasser par le PFD pour exprimer l'autre.

C - Caractéristiques générales des mouvements dans un champ en $1/r^2$

Considérons le cas d'une force centrale dont la norme décroît en $1/r^2$, principalement la force de gravitation exercée par un astre central de masse m_0 (p.ex. le Soleil) sur un autre astre de masse m qui orbite autour de lui (p.ex. la Terre),

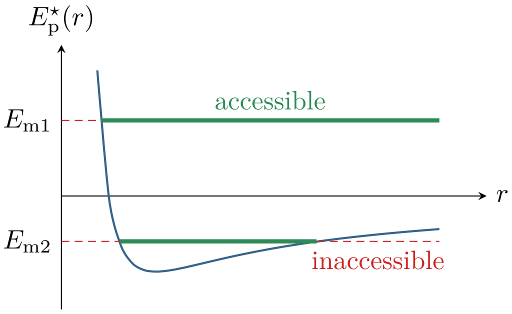
$$\vec F_\mathrm{g} = -\mathcal{G}\frac{m_0 m}{r^2}\vec e_r\,.$$

- **Conservation du moment cinétique :** $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec F) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec F = r\,\vec e_r \wedge F_r\,\vec e_r = \vec 0$ donc $\vec L_O = \overrightarrow{\text{cte}}$.
  - ▷ *Conséquence 1 :* le mouvement est plan car $\overrightarrow{OM} \perp \vec L_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec v$ à cause du produit vectoriel ;
  - ▷ *Conséquence 2 :* loi des aires
    - → constante des aires : $\boxed{C = r^2\dot\theta = \text{cte}}$ car $\vec L_O = mr^2\dot\theta\,\vec e_z$;
    - → l'aire balayée par le rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$ pendant une durée Δt est proportionnelle à Δt, mais ne dépend ni de r ni de la masse m de la planète (ou satellite, ou etc.) en mouvement.

- **Énergie potentielle effective :**
  - ▷ C'est une astuce pour utiliser ce qu'on sait sur les mouvement conservatifs à une dimension alors que le mouvement est à deux dimensions.
  - ▷ Idée : utiliser la constante des aires pour remplacer $\dot\theta$ dans l'énergie cinétique par C/r^2, et interpréter le terme correspondant comme une énergie potentielle effective.

$$E_\mathrm{m} = \underbrace{\frac12 m\dot r^2 + \frac12 mr^2\dot\theta^2}_{=E_\mathrm{c}} + E_\mathrm{p}(r) = \frac12 m\dot r^2 + \underbrace{\frac12 m\frac{C^2}{r^2} + E_\mathrm{p}(r)}_{=E_\mathrm{p}^\star(r)}\,.$$

- **Positions accessibles à la particule :** en fonction de l'énergie mécanique initialement donnée à la particule.
  - ▷ Comme $\frac12 m\dot r^2 > 0$, tous les r tels que $E_\mathrm{p}^\star(r) < E_\mathrm{m}$ sont accessibles.
  - ▷ Sur une courbe d'énergie potentielle effective :



→ Particule peut partir à l'infini ($E_\mathrm{m} \geq 0$) : état de diffusion ;
→ Domaine accessible borné ($E_\mathrm{m} < 0$) : état lié.

- **Géométrie des trajectoires :** ce sont toujours des coniques (cercle, ellipse, parabole, hyperbole).
  - ▷ Toutes les trajectoires liées sont circulaires ou elliptiques.
  - ▷ Point le plus proche du centre de force : périgée/périhélie ; point le plus éloignée : apogée/aphélie.

D - Système solaire et satellites

- **Lois de Kepler :**
  - *Loi des orbites :* les trajectoires des planètes sont des ellipses dont le Soleil est un des foyers ;
  - *Loi des aires :* les aires balayées par le segment Soleil-planète pendant des durées égales sont égales, et identiques pour toutes les planètes ;
  - *Loi des périodes :* $T^2/a^3 =$ cte indépendante de la planète, avec T la période de révolution et a le demi-grand axe de l'ellipse.

- **Une orbite circulaire est parcourue à vitesse constante :** $E_\mathrm{m} =$ cte et $E_\mathrm{p} =$ cte car $r =$ cte donc $E_\mathrm{c} =$ cte.

- **Vitesse en orbite circulaire :** TRC appliqué à la planète en mouvement circulaire uniforme.

$$m\vec{a} = -m\frac{v^2}{R}\vec{e}_r = -\mathcal{G}\frac{m_0 m}{R^2}\vec{e}_r \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{v = \sqrt{\frac{m_0\mathcal{G}}{R}}\,.}$$

$\rightsquigarrow$ Comme le mouvement est uniforme, la période vaut $R = 2\pi r/v$, puis on retrouve la troisième loi de Kepler qui se généralise aux ellipses en remplaçant R par a :

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{m_0\mathcal{G}}\,.}$$

Questions de cours

Seuls les étudiants du groupe de TD PT* seront interrogés en colle sur les questions marquées d'une étoile, car elles sont plus techniques et/ou moins essentielles ... mais tous les étudiants sont bien sûr invités à les travailler !

R5.1 - On considère un système de deux électrodes planes parallèles (type condensateur) distantes de L le long de l'axe (Ox). Elles sont soumises à une tension $U = V(0) - V(L)$. Une particule de charge q est lâchée sans vitesse de l'électrode située en $x = 0$, on souhaite qu'elle atteigne la deuxième. Quel doit être le signe de U pour que ce soit possible ? Déterminer la vitesse avec laquelle l'électrode située en $x = L$ est atteinte.

(★) R5.2 - On considère une particule de charge $q > 0$ dans un champ magnétostatique uniforme $\vec{B} = B\vec{e}_z$. **On admet** que la trajectoire est circulaire, parcourue *en sens horaire* autour de (Oz), et on suppose le vecteur vitesse initiale perpendiculaire au champ magnétique : $\vec{v}_0 = -v_0\vec{e}_\theta$. Montrer que le mouvement est uniforme, puis déterminer la pulsation et le rayon cyclotron.

(★) R5.3 - Dans le cas d'un champ central quelconque, établir la conservation du moment cinétique et ses conséquences (planéité du mouvement et loi des aires).

(★) R5.4 - En considérant le champ gravitationnel, construire l'énergie potentielle effective adaptée et l'utiliser pour discuter de la nature des trajectoires en fonction de la valeur de l'énergie mécanique.

R5.5 - Dans le cas particulier d'un mouvement circulaire dans le champ gravitationnel, montrer que le mouvement est uniforme et établir sa vitesse.

R5.6 - Dans le cas particulier d'un mouvement circulaire dans le champ gravitationnel, établir la troisième loi de Kepler et la généraliser au cas d'une trajectoire elliptique. L'expression de la vitesse en orbite circulaire pourra être admise ou redémontrée.

Pour s'entraîner

Difficulté d'analyse et compréhension, initiative requise ;
Difficulté technique et calculatoire ;
Exercice important.

Flasher ce code pour accéder aux corrigés

Exercice 1 : Modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène

1 | 2 |

▷ *Caractéristiques d'une orbite circulaire ;*
▷ *Énergie mécanique.*

L'expérience de Rutherford a prouvé qu'un atome avait une structure lacunaire, composée essentiellement de vide. Ernest Rutherford propose donc un modèle planétaire de l'atome d'hydrogène, où l'électron (masse m, charge $-e$) est en orbite circulaire de rayon r autour d'un proton P (charge $+e$) qu'on supposera fixe dans le référentiel d'étude.

Données :

- ▷ constante de Planck $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$;
- ▷ vitesse de la lumière dans le vide $c = 3{,}0 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$;
- ▷ permittivité diélectrique du vide $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F \cdot m^{-1}}$;
- ▷ charge élémentaire $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$;
- ▷ masse de l'électron $m = 9{,}1 \cdot 10^{-30}\,\mathrm{kg}$;
- ▷ $1{,}0\,\mathrm{eV} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$.

1 - Exprimer la force exercée par le proton sur l'électron. En déduire l'énergie potentielle à laquelle est soumis l'électron.

2 - Déterminer la relation entre la vitesse v de l'électron et le rayon r de l'orbite, puis exprimer l'énergie mécanique de l'électron en fonction du rayon r de l'orbite.

3 - Relier l'énergie potentielle de l'électron à son énergie mécanique.

Pour rendre compte du spectre de raies discret de l'atome d'hydrogène et de sa stabilité, Niels Bohr postule que l'électron ne peut occuper que certaines orbites stables de rayons r_n tel que le moment cinétique de l'électron par rapport au point P vérifie une condition de quantification

$$L_P(n) = n\hbar$$

où n est un entier naturel non nul appelé nombre quantique principal et $\hbar = h/2\pi$ la constante de Planck réduite.

4 - Exprimer le moment cinétique de l'électron L_P en fonction de r_n seulement.

5 - En déduire en fonction de n les rayons r_n des orbites permises pour l'électron.

6 - Montrer alors que l'énergie mécanique de l'électron peut s'écrire sous la forme

$$E_n = -\frac{E_0}{n^2}\,.$$

Calculer numériquement E_0.

7 - La condition de quantification peut également s'interpréter en termes d'ondes de matière. Rappelons que la longueur d'onde de de Bröglie associée à une particule se déplaçant à la vitesse v vaut $\lambda = h/mv$. Montrer que la condition de quantification peut s'écrire sous la forme

$$2\pi r_n = n\lambda\,.$$

Comment interpréter cette condition en termes ondulatoires ?

Exercice 2 : Gravity

exemple officiel CCINP | 2 | 2 |

- *Loi de Kepler ;*
- *Orbite circulaire et elliptique ;*
- *Conservation de l'énergie mécanique.*

Dans le film Gravity, des astronautes effectuent une mission de maintenance sur le télescope spatial Hubble lorsque leur navette est détruite. Leur seul espoir semble être de rejoindre la Station spatiale internationale, l'ISS. Le but de cet exercice est de définir dans quelles conditions ce voyage spatial est possible.

On suppose que le télescope Hubble et l'ISS sont en orbite circulaire basse autour de la terre, respectivement à 600 km et 400 km au-dessus de la Terre, dans le même plan. Le rayon de la terre est $R_\mathrm{T} = 6400\,\mathrm{km}$; $\mathcal{G}$ est la constante universelle de gravitation.

1 - Exprimer la force de gravitation exercée par la Terre, de masse M_0, sur l'astronaute et son équipement, de masse m. Donner l'expression de l'énergie potentielle de gravitation.

2 - En exprimant le principe fondamental de la dynamique pour un système en rotation uniforme, établir la troisième loi de Kepler. Exprimer l'énergie de l'astronaute sur son orbite, en fonction de $\mathcal{G}$, m, M_0 et r, rayon de l'orbite.

3 - Déterminer numériquement la période T_S de l'ISS, sachant que la période du télescope vaut $T_\mathrm{H} = 97\,\mathrm{min}$. En déduire numériquement la vitesse du télescope v_H, puis celle de la station spatiale v_S sur leur orbite respective.

Pour rejoindre la station spatiale, l'astronaute envisage une orbite de transfert elliptique, dont l'apogée de distance r_H par rapport au centre de la Terre est sur l'orbite du télescope, et le périgée de distance r_S par rapport au centre de la terre est sur l'orbite de l'ISS.

4 - Représenter la trajectoire suivie par l'astronaute.

5 - Exprimer l'énergie de l'astronaute sur cette trajectoire en fonction de $\mathcal{G}$, M_0, m, r_H et r_S.

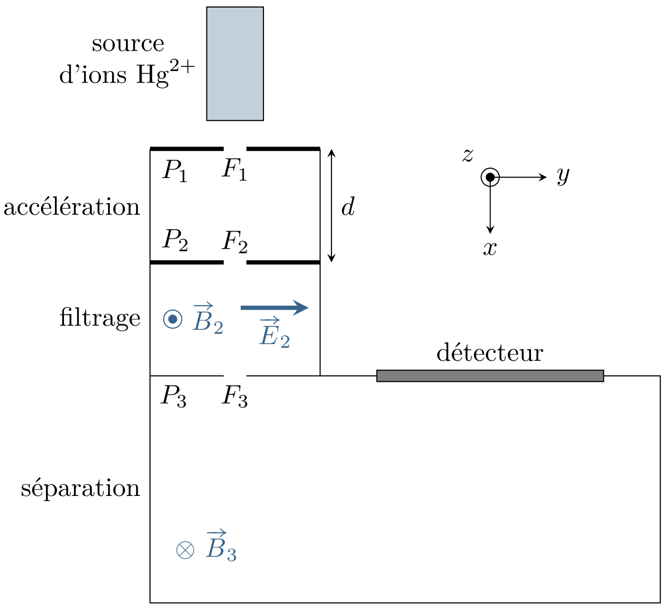
6 - Exprimer la vitesse de l'astronaute à l'apogée, en fonction de r_H, T_H et r_S. Par analogie, en déduire l'expression de la vitesse au périgée en fonction de r_S, T_S et r_H. Calculer les valeurs numériques. Techniquement comment l'astronaute peut-il gérer sa vitesse ?

7 - Quelle est la durée de ce voyage ?

Exercice 3 : Spectrométrie de masse

| 2 | 2 |

- *Mouvement dans un champ électrostatique ;*
- *Mouvement cyclotron.*



Un spectromètre de masse est un appareil qui permet de mesurer la masse ou la charge d'un ion (plus précisémment le rapport entre les deux). De nombreuses technologies de spectromètre de masse existent : nous étudions ici le principe d'un spectromètre dit « à secteur magnétique ».

Dans le dispositif étudié ici, une source émet des ions mercure ${}^{200}_{80}\mathrm{Hg}^{2+}$ et ${}^{202}_{80}\mathrm{Hg}^{2+}$. Les deux ions ont la même charge, mais leur masse diffère : c'est donc elle que le spectromètre permet de déterminer. Ces ions entrent dans le spectromètre de masse par la fente F_1. Le spectromètre se compose de trois étages d'accélération, filtrage en vitesse puis séparation des ions. Une barrette de capteurs de charge est placée dans la chambre de séparation. On mesure ainsi la charge ayant impacté chaque point du détecteur en fonction de son abscisse y.

Par convention, on note sans indice les grandeurs relatives à un ion quelconque et on l'indice par le nombre de masse lorsqu'il est important pour les valeurs numériques : par exemple m (pour un calcul littéral) et m_{200} ou m_{202} pour les applications numériques.

A - Accélération des ions

Un ion mercure, de masse m et charge $2e$ entre dans le spectromètre par la fente F_1. On néglige sa vitesse initiale. Une tension U appliquée entre les plaques P_1 et P_2 séparées de d permet de l'accélérer jusqu'à la fente F_2.

1 - Quelle doit être la plaque de potentiel le plus élevé pour que l'ion soit effectivement accéléré ?

2 - Établir l'expression littérale de la vitesse v de l'ion lorsqu'il atteint la plaque P_2.

3 - On trouve numériquement des vitesses valant $1{,}38 \cdot 10^5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ et $1{,}39 \cdot 10^5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Pourquoi pouvait-on s'attendre à un écart aussi faible ?

B - Filtrage en vitesse

Comme l'hypothèse de vitesse initiale nulle en F_1 est difficile à réaliser en pratique, la vitesse des ions en F_2 présente une certaine dispersion. Pour améliorer la précision de l'appareil, un filtrage en vitesse est alors réalisé. Le dispositif est réglé tel que, dans la chambre de filtrage située entre P_2 et P_3, il règne un champ électromagnétique uniforme composé d'un champ électrique $\vec{E}_2 = E_2 \vec{e}_y$ et d'un champ magnétique $\vec{B}_2 = B_2 \vec{e}_z$. On suit un ion qui traverse la plaque P_2 par la fente F_2 avec une vitesse $\vec{v} = v \vec{e}_x$.

4 - À quelle condition sur les forces qu'il subit l'ion peut-il avoir un mouvement rectiligne l'amenant de F_2 à F_3 ?

5 - En déduire que seuls les ions de vitesse $v = v_0 = E_2/B_2$ parviennent en F_3.

6 - Numériquement, $v_0 = 1{,}38 \cdot 10^5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. En déduire quel isotope du mercure parvient en F_3 avec ces réglages.

C - Séparation des ions

Pour mesurer la composition isotopique du mercure, on règle la valeur de E_2 pour permettre le passage de l'isotope 200 pendant une minute puis on change sa valeur pour que l'isotope 202 passe pendant une minute. La valeur de B_2 reste constante tout au long de l'opération.

Une fois sorti de la zone de filtrage par la fente F_3 avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$, l'ion pénètre dans une région où il ne règne qu'un champ magnétique uniforme $\vec{B}_3 = -B_3 \vec{e}_z$ valant $200\ \mathrm{mT}$. Ce champ magnétique donne à l'ion une trajectoire qu'on admet être circulaire, et après avoir parcouru un demi tour il atteint le détecteur en un point d'abscisse y.

7 - Montrer que le mouvement de l'ion dans cette région est uniforme.

8 - Déterminer littéralement le rayon R de la trajectoire de l'ion.

9 - Numériquement, on trouve respectivement $71{,}8\ \mathrm{cm}$ et $72{,}5\ \mathrm{cm}$ pour les deux isotopes. En déduire les abscisses y_{200} et y_{202} des points d'impact de chaque type d'ion sur le détecteur, l'origine $y = 0$ étant prise au centre de la fente F_3.

10 - Les charges totales accumulées valent respectivement $Q_1 = 3{,}85 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{C}$ pour la plus petite valeur de y et $Q_2 = 1{,}15 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{C}$ pour la plus élevée. En déduire la composition isotopique des ions émis par la source.