




Théorèmes de la mécanique

Exercice 1 : Transformation par vent de côté



-  ▷ Chute libre avec frottement ;
▷ PFD.

1 C'est la vitesse relative qui compte. Pour interpréter/justifier qualitativement cette expression, on peut raisonner sur des cas limites et voir si ce qu'elle donne est physiquement cohérent : ballon posé ($\vec{v} = \vec{0}$), ballon qui va à la même vitesse que le vent, etc.

2 $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\lambda(\vec{v} - \vec{V}) + m\vec{g}$ soit sous forme canonique $\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\lambda}{m}\vec{v} = \vec{g} + \frac{\lambda}{m}\vec{V}$, et on pose $\tau = m/\lambda$

Solution particulière : $\vec{v}_p = \frac{m}{\lambda}\vec{g} + \vec{V}$.

Finalement, tenant compte de la condition initiale $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$,

$$\vec{v}(t) = e^{-t/\tau}\vec{v}_0 + (1 - e^{-t/\tau})\vec{v}_p.$$

3 On projette

$$\begin{cases} \dot{x} = e^{-t/\tau}v_0 \cos \alpha \cos \beta + 0 \\ \dot{y} = e^{-t/\tau}v_0 \sin \alpha \cos \beta + (1 - e^{-t/\tau})V \\ \dot{z} = e^{-t/\tau}v_0 \sin \beta - (1 - e^{-t/\tau})\tau g \end{cases}$$

et on intègre, sans oublier les constantes d'intégration

$$\begin{cases} x = -\tau e^{-t/\tau}v_0 \cos \alpha \cos \beta + K_x \\ y = -\tau e^{-t/\tau}(v_0 \sin \alpha \cos \beta - V) + Vt + K_y \\ z = -\tau e^{-t/\tau}(v_0 \sin \beta + \tau g) - \tau gt + K_z \end{cases}$$

et on utilise ensuite la condition initiale $(x_B, y_B, 0)$ pour obtenir

$$\begin{cases} x = \tau v_0 \cos \alpha \cos \beta (1 - e^{-t/\tau}) + x_B \\ y = \tau (v_0 \sin \alpha \cos \beta - V)(1 - e^{-t/\tau}) + Vt + y_B \\ z = \tau (v_0 \sin \beta + \tau g)(1 - e^{-t/\tau}) - \tau gt \end{cases}$$

4 Il faut trouver l'instant où $x(t_0) = 0$, c'est-à-dire où le ballon passe la ligne d'en but. On trouve $t_0 = 2,5$ s. On va ensuite regarder les coordonnées $y(t_0) = 3,5$ m et $z(t_0) = 7,5$ m. Malheureusement, $y(t_0) > d/2 = 2,80$ m. Le ballon passe donc à droite des poteaux, l'essai n'est pas transformé, les Anglais gagnent.

5 Si $x_B = 0$ l'angle apparent sous lequel est vu les poteaux est nul, et de même si on s'en éloigne infiniment. Il y a donc passage par un maximum entre les deux.

Exercice 2 : Vibration d'une molécule de monoxyde de carbone

- ▷ Force exercée par un ressort ;
- ▷ Oscillateur harmonique.

1 L'atome de carbone n'est soumis qu'à la force exercée par le ressort. Comme on le constate facilement sur la figure 1, sa longueur instantanée est $L = x_2 - x_1$, donc

$$\vec{F}_C = -k(x_2 - x_1 - L_0)(-\vec{e}_x) = +k(x_2 - x_1 - L_0)\vec{e}_x.$$

Par application du PFD dans un référentiel galiléen (qu'on ne précisera pas!) et en projetant, on obtient

$$\boxed{m_1\ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1 - L_0)}. \quad (1)$$

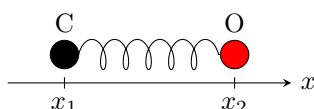


Figure 1 – Molécule de monoxyde de carbone.

2 De même, la force exercée par le ressort sur l'atome d'oxygène vaut

$$\vec{F}_O = -k(x_2 - x_1 - L_0)(+\vec{e}_x) = -k(x_2 - x_1 - L_0)\vec{e}_x.$$

et ainsi

$$\boxed{m_2\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1 - L_0)}. \quad (2)$$

3 Par combinaison linéaire,

$$\begin{aligned} \frac{(1) + (2)}{m_1 + m_2} &\iff \frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{d^2x_2}{dt^2} = \frac{k}{m_1 + m_2}(x_2 - x_1 - L_0) - \frac{k}{m_1 + m_2}(x_2 - x_1 - L_0) \\ &\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} x_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} x_2 \right) = 0 \\ &\boxed{\frac{d^2\sigma}{dt^2} = 0} \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \frac{(2)}{m_2} - \frac{(1)}{m_1} &\iff \frac{d^2x_2}{dt^2} - \frac{d^2x_1}{dt^2} = -\frac{k}{m_2}(x_2 - x_1 - L_0) - \frac{k}{m_1}(x_2 - x_1 - L_0) \\ &\frac{d^2(x_2 - x_1)}{dt^2} = -k \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) (x_2 - x_1 - \ell_0) \\ &\boxed{\frac{d^2\delta}{dt^2} = -\frac{k}{\mu}(\delta - \ell_0)}. \end{aligned}$$

4 • **Expression de σ** : raisonnons par intégrations successives,

$$\ddot{\sigma} = 0 \quad \text{donc} \quad \dot{\sigma} = A = \text{cte.}$$

À l'instant initial,

$$\dot{\sigma}(t=0) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{\frac{m_1}{m_1 + m_2}} \dot{x}_1(t=0) + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{x}_2(t=0) = 0 = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sol}}}{A} \quad \text{d'où} \quad A = 0.$$

Ainsi,

$$\dot{\sigma} = 0 \quad \text{donc} \quad \sigma = B = \text{cte.}$$

À l'instant initial,

$$\sigma(t=0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{=} \frac{m_1}{m_1 + m_2} X_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} X_2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sol}}}{=} B$$

Finalement,

$$\sigma = \frac{m_1}{m_1 + m_2} X_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} X_2 .$$

• **Expression de δ** : l'équation différentielle vérifiée par δ est celle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{k/\mu}$ et dont $\delta = \ell_0$ est une solution particulière. Ainsi,

$$\delta(t) = \ell_0 + A' \cos(\omega_0 t) + B' \sin(\omega_0 t) .$$

À l'instant initial,

$$\delta(t=0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{=} X_2 - X_1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{expr}}}{=} \ell_0 + A' + 0 \quad \text{d'où} \quad A' = X_2 - X_1 - \ell_0 .$$

La deuxième condition initiale porte sur la dérivée $\dot{\delta}$, qui est donnée par

$$\dot{\delta} = -A' \omega_0 \sin(\omega_0 t) + B' \omega_0 \cos(\omega_0 t) .$$

À l'instant initial,

$$\dot{\delta}(t=0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{=} \dot{x}_2(t=0) - \dot{x}_1(t=0) = 0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{expr}}}{=} 0 + B' \quad \text{d'où} \quad B' = 0 .$$

Finalement,

$$\delta(t) = \ell_0 + (X_2 - X_1 - \ell_0) \cos(\omega_0 t) .$$

• **Expressions de x_1 et x_2** : il suffit de renverser le changement de variables pour exprimer x_1 et x_2 en fonction de σ et δ , et de remplacer. À vous de jouer !

5 En identifiant la fréquence des oscillations à celle de l'onde électromagnétique,

$$\nu \underset{\substack{\uparrow \\ \text{EM}}}{=} \frac{c}{\lambda} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{méca}}}{=} \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

on en déduit

$$k = 4\pi^2 \mu \frac{c^2}{\lambda^2} .$$

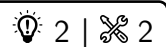
La masse d'un atome de carbone vaut $m_1 = M_C/\mathcal{N}_A$, de même pour l'oxygène, et ainsi

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{M_C M_O}{(M_C + M_O)\mathcal{N}_A} = 1,1 \cdot 10^{-26} \text{ kg} .$$

Ainsi,

$$k = 1,9 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} .$$

Exercice 3 : Anneau sur une tige en rotation



On travaille dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

1 L'anneau est soumis à

▷ son poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$;

▷ la réaction de la tige \vec{R} qui est normale à la tige puisqu'on néglige tout frottement. Cela signifie qu'elle ne comporte pas de composante radiale et qu'elle s'écrit ainsi $\vec{R} = R_\theta \vec{u}_\theta + R_z \vec{u}_z$.

Par ailleurs, on retrouve rapidement l'expression de l'accélération du point M :

$$\overrightarrow{OM} = r \cdot \vec{u}_r \Rightarrow \vec{v} = \dot{r} \cdot \vec{u}_r + r\dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta \Rightarrow \vec{a} = \ddot{r} \cdot \vec{u}_r + \dot{r}(\dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta) + r\ddot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta + r\dot{\theta} \cdot \dot{\vec{u}}_\theta + r\dot{\theta}(-\dot{\theta} \cdot \vec{u}_r)$$

et avec $\dot{\theta} = \omega$ la vitesse angulaire constante ici, on aboutit à $\vec{a} = (\ddot{r} - \omega^2 r) \cdot \vec{u}_r + 2\omega \dot{r} \cdot \vec{u}_\theta$.

On peut ainsi écrire le principe fondamental de la dynamique sous la forme :

$$m\vec{a} = \vec{p} + \vec{R} \Rightarrow m[(\ddot{r} - \omega^2 r) \cdot \vec{u}_r + 2\omega \dot{r} \cdot \vec{u}_\theta] = -mg \cdot \vec{u}_z + R_\theta \cdot \vec{u}_\theta + R_z \cdot \vec{u}_z$$

Par projection selon \vec{u}_r de l'équation vectorielle précédente on obtient l'équation différentielle en $r(t)$:

$$m(\ddot{r} - \omega^2 r) = 0 \Rightarrow \ddot{r} = \omega^2 r$$

la projection du PFD selon \vec{u}_z et \vec{u}_θ permet d'obtenir $R_z = mg$ et $R_\theta = 2\omega\dot{r}$.

2 La solution de l'équation différentielle du second ordre, à coefficients constants, de signes **différents** en $r(t)$ est de la forme $r(t) = A \cdot \exp(\omega t) + B \cdot \exp(-\omega t)$ où A et B sont des constantes à déterminer à partir des conditions initiales :

$$\begin{cases} r(0) = r_0 \\ \dot{r}(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B = r_0 & (1) \\ \omega A - \omega B = 0 & (2) \end{cases} \text{ et } (1)+(2)/\omega \Rightarrow 2A = r_0 \text{ soit } A = \frac{r_0}{2} = B$$

On en déduit finalement $r(t) = \frac{r_0}{2} [\exp(\omega t) + \exp(-\omega t)] = r_0 \cosh(\omega t)$ (fonction cosinus hyperbolique) : $r(t)$ diverge.

3 Comme $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \omega$, on en déduit $\theta = \omega t + 0$ en considérant $\theta(0) = 0$ et ainsi $r(t) = r_0 \cosh \theta$.

La trajectoire est donc une spirale exponentielle.

Exercice 4 : Une luge sur une bosse



\triangleright Énergie mécanique ;
 \triangleright Décollage d'un support.

1 Appliquons le théorème de la résultante cinétique à la luge, en mouvement par rapport au référentiel terrestre que l'on considère galiléen. On se place dans le repère polaire de centre O défini figure 2. La luge est soumise son poids,

$$\vec{P} = m\vec{g} = -mg \cos \theta \vec{e}_r + mg \sin \theta \vec{e}_\theta,$$

et à la force de réaction de la piste,

$$\vec{N} = N \vec{e}_r \quad \text{avec} \quad N > 0.$$

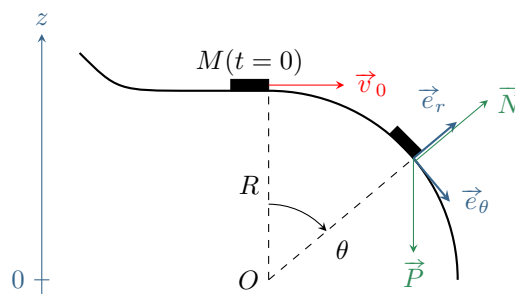


Figure 2 – Schéma des notations.

Ainsi, par application de la loi de la quantité de mouvement dans le référentiel terrestre,

$$m\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{P} + \vec{N}$$

et comme

$$\vec{OM} = R\vec{e}_r \quad \text{alors} \quad \vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r + R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$$

En projetant sur \vec{e}_r , on en déduit

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -mR\dot{\theta}^2 = -mg \cos \theta + N \quad \text{d'où} \quad \boxed{N = -mR\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta.}$$

2 Pour faire apparaître la vitesse initiale au lieu de $\dot{\theta}$, utilisons la conservation de l'énergie mécanique. En effet, la luge n'est soumise qu'à une force conservative (son poids) et à une force qui ne travaille pas (la réaction de la piste). Exprimons l'énergie potentielle de pesanteur de la luge. Comme l'axe z est ascendant et en prenant l'origine des énergies potentielles en $z = 0$, alors

$$E_{pp} = mgz = mgR \cos \theta.$$

De plus, la vitesse de la luge a pour norme $v = R\dot{\theta}$, donc son énergie cinétique vaut

$$E_c = \frac{1}{2} mR^2 \dot{\theta}^2.$$

Finalement, son énergie mécanique vaut

$$E_m = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mgR \cos \theta.$$

Cette quantité est constante, égale à sa valeur initiale,

$$E_m = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgR$$

Par identification, on en déduit

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgR = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mgR \cos \theta$$

ce qui permet d'isoler le terme à remplacer dans l'expression de N ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 &= \frac{1}{2}mv_0^2 + mgR(1 - \cos \theta) \\ -mR\dot{\theta}^2 &= -\frac{mv_0^2}{R} + 2mg(\cos \theta - 1). \end{aligned}$$

On en déduit finalement

$$N = -\frac{mv_0^2}{R} + mg(3 \cos \theta - 2).$$

3 La luge quitte la piste si la force de réaction s'annule, c'est-à-dire pour un angle θ_d tel que $N(\theta_d) = 0$, soit

$$0 = -\frac{mv_0^2}{R} + mg(3 \cos \theta_d - 2) \quad \text{d'où} \quad \theta_d = \arccos\left(\frac{v_0^2}{3gR} + \frac{2}{3}\right).$$

Si la vitesse de la luge est faible, à la limite $v_0 \simeq 0$, cet angle est bien défini et vaut $\arccos 2/3$. Ainsi, **la luge quitte la piste quelle que soit sa vitesse initiale.**

4 Pour que l'arccosinus soit défini, il faut que son argument soit inférieur à 1, c'est-à-dire

$$\frac{v_0^2}{3gR} + \frac{2}{3} \leq 1 \quad \text{soit} \quad v_0^2 \leq 3gR \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) \quad \text{donc} \quad v_0 < \sqrt{gR} = v_{\text{lim}}.$$

Si $v_0 > v_{\text{lim}}$, les équations établies dans les questions précédentes indiquent que la norme de la force de réaction \vec{N} serait toujours négative, quelle que soit la valeur de θ . Cela n'a pas de sens, et signifie que l'hypothèse utilisée pour les établir (contact entre la luge et la piste) est fautive. Par conséquent, on en déduit qu'il n'y a jamais de contact : **la luge quitte la piste dès $\theta = 0$** , et elle suit une trajectoire parabolique (chute libre).

Exercice 5 : Balourd

oral banque PT | 💡 2 | ✂ 3



▷ Moment cinétique ;

▷ Oscillations autour d'une position d'équilibre.

1 Deux types de mouvement sont possibles :

▷ si m est suffisamment faible, alors le poids du balourd suffit à compenser celui de la masse et il existe une position d'équilibre ;

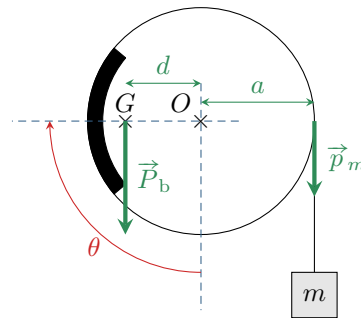
▷ si m est trop élevée, alors le poids de la masse entraîne le cylindre en rotation et le fil se déroule complètement.

Le moment du poids du balourd est maximal pour $\theta = \pi/2$, voir figure 3. Dans cette situation, en utilisant les bras de levier pour calculer les moments par rapport à Ox ,

$$\mathcal{M}_{b,\text{max}} + \mathcal{M}_m = -Mgd + m_cga = 0 \quad \text{soit} \quad m_c = M \frac{d}{a}.$$

En appliquant le théorème de la résultante cinétique à la masse m puis en supposant que le fil transmet parfaitement les efforts, on peut montrer que la force exercée par le fil sur le cylindre vaut en fait

$$\vec{F} = m\vec{g} + m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Figure 3 – Position d'équilibre lorsque $m = m_c$.

avec \vec{v} la vitesse de la masse m . On suppose ici son accélération suffisamment faible devant \vec{g} pour la négliger.

2 Évidemment, on suppose $m < m_c$. Le point d'application de \vec{p}_m ne dépend pas de θ , donc son moment par rapport à (Ox) vaut toujours

$$\mathcal{M}_m = mga.$$

Le moment du poids du balourd vaut

$$\mathcal{M}_b = (\vec{OG} \wedge \vec{P}_b) \cdot \vec{e}_x = -Mgd \sin \theta$$

Dans la position d'équilibre, ces deux moments se compensent donc

$$-Mgd \sin \theta_e + mga = 0 \quad \text{d'où} \quad \theta_e = \arcsin \frac{ma}{Md}.$$

On retrouve la condition d'existence de la position d'équilibre : pour qu'elle soit définie, il faut

$$ma < Md \quad \text{soit} \quad m < \frac{Md}{a} = m_c.$$

3 D'après le théorème du moment cinétique,

$$J\ddot{\theta} = -Mgd \sin \theta + mga$$

On se place au voisinage de la position d'équilibre : on pose donc

$$\theta = \theta_e + \varepsilon \quad \text{avec} \quad \varepsilon \ll 1.$$

On peut alors faire un développement limité du sinus :

$$\sin(\theta_e + \varepsilon) \simeq \sin \theta_e + \varepsilon \cos \theta_e.$$

Il s'agit ni plus ni moins de la formule de Taylor,

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + \dots$$

Attention au développement limité : ce n'est pas l'angle θ qui est faible, mais bien l'écart ε . Il est donc a priori faux de faire un développement limité par rapport à θ .

L'équation différentielle devient

$$J\ddot{\varepsilon} + Mgd \cos \theta_e \varepsilon = -Mgd \sin \theta_e + mga,$$

et compte tenu de l'expression de $\sin \theta_e$ obtenue à la question précédente on obtient

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{Mgd \cos \theta_e}{J} \varepsilon = 0.$$

Il est normal de trouver un second membre nul : l'équation différentielle porte sur l'écart à la position d'équilibre, qui est par définition nul lorsque le système est à l'équilibre.

On reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre

$$\omega_0^2 = \frac{Mgd \cos \theta_e}{J} = \frac{Mgd \sqrt{1 - \left(\frac{ma}{Md}\right)^2}}{Ma^2} = \frac{g}{Ma^2} \sqrt{M^2 d^2 - m^2 a^2}$$

d'où on déduit la période des oscillations

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{Ma^2}{g \sqrt{M^2 d^2 - m^2 a^2}}}$$

Exercice 6 : Chariot à niveau constant

💡 3 | ✂ 1



▷ *Problème ouvert.*

Supposons que le distributeur porte N plateaux, tous d'épaisseur $e = 1$ cm et de masse $m = 200$ g. Quelle que soit la valeur de N , le sommet de la pile de plateaux se trouve $h = 10$ cm sous le point d'attache des deux ressorts. On néglige le poids du support à plateaux devant celui des plateaux. Comme les plateaux sont évidemment immobiles (...) alors la force exercée par les deux ressorts doit compenser le poids des plateaux, ce qui se traduit par

$$2k(Ne + h - \ell_0) = Nmg \quad \text{soit} \quad 2k(h - \ell_0) + N(2ke - mg) = 0$$

Cette condition devant être vérifiée pour toute valeur de N , on en déduit les deux égalités

$$\begin{cases} 2k(h - \ell_0) = 0 \\ 2ke - mg = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \ell_0 = h = 10 \text{ cm} \\ k = \frac{mg}{2e} = 100 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} \end{cases}$$

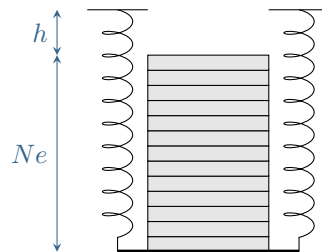


Figure 4 – Distributeur de plateaux.

Pour identifier le système d'équations, on peut également raisonner d'abord sur le cas $N = 0$ qui donne la première équation du système, puis simplifier l'équation issue du PFD, et en déduire la deuxième équation du système.

Exercice 7 : Posé sur un plateau ?

💡 3 | ✂ 2



- ▷ Théorème de la résultante cinétique ;
- ▷ Forces de contact ;
- ▷ Problème ouvert.

• Analyse qualitative

L'étude est évidemment menée dans le référentiel terrestre. Il s'agit d'une question de contact entre le plateau et le cube : on s'attend donc à utiliser la loi de la quantité de mouvement pour déterminer une force inconnue, celle qui traduit le contact entre cube et plateau. La démarche est donc de **supposer** le contact, de résoudre les équations, et de revenir sur l'hypothèse pour vérifier ses limites de validité.

• Mise en équation

Reste à trouver à quel système appliquer cette loi : compte tenu de la question, le choix est de considérer le cube, supposé de masse m . Il est soumis à son poids,

$$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$$

et à la force $\vec{R} = R\vec{e}_z$ verticale vers le haut exercée par le plateau. Par contre, comme le ressort et le cube ne se touchent pas, le ressort n'exerce **aucune** force sur le cube, tout passe par l'intermédiaire du plateau ... et ce même si on sent bien que le cube bouge grâce au ressort ! Méfiez-vous des intuitions trompeuses sur les forces ! D'après la loi de la quantité de mouvement appliquée au cube et projetée sur z ,

$$\boxed{m\ddot{z} = -mg + R.}$$

Le problème ici est que cette unique équation implique deux inconnues : \ddot{z} et R . Il faut donc une équation supplémentaire, qui a priori devrait nous donner \ddot{z} puisque l'on cherche R . Cette équation va venir du théorème de la résultante cinétique appliqué au plateau : comme le cube et le plateau sont indéformables et en contact, alors leur accélération est la même. Le plateau est soumis à trois forces que sont son poids,

$$\vec{P}' = m'\vec{g} = -m'g\vec{e}_z,$$

la force de rappel du ressort,

$$\vec{f}_{\text{ress}} = -k(\ell(t) - \ell_0)(-\vec{e}_z) = +k(\ell_{\text{éq}} - z - \ell_0)\vec{e}_z$$

et la force qu'il subit de la part du cube \vec{R}' , égale à $-\vec{R} = -R\vec{e}_z$ d'après le principe des actions réciproques. D'après la loi de la quantité de mouvement appliquée au plateau et projetée sur z ,

$$\boxed{m'\ddot{z} = -m'g + k(\ell_{\text{éq}} - z - \ell_0) - R}$$

On aboutit donc finalement à un système de deux équations différentielle à deux inconnues, \ddot{z} et R . Comme il s'agit d'équations différentielles, il n'est pas possible de les résoudre comme des équations algébriques (le z apparaissant dans la force exercée par le ressort « générant »). On va donc commencer par résoudre l'équation sur z puis en déduire R . En sommant les deux équations, on obtient

$$(m + m')\ddot{z} = -(m + m')g - kz + k(\ell_{\text{éq}} - \ell_0).$$

Avant de se lancer dans la résolution complète, il est préférable d'étudier la position d'équilibre où par définition de l'équilibre $\ddot{z} = 0$ et par définition du repère $z = 0$, donc

$$0 = -(m + m')g + k(\ell_{\text{éq}} - \ell_0)$$

Cela permet de simplifier l'équation différentielle, qui s'écrit sous forme canonique

$$\ddot{z} + \frac{k}{m + m'}z = 0.$$

On reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{k/(m + m')}$. Comme l'équation est homogène, on a directement

$$z(t) = \alpha \cos(\omega_0 t) + \beta \sin(\omega_0 t).$$

Les constantes se déterminent à partir des conditions initiales,

$$z(0) \underbrace{=}_{\text{sol}} \alpha \underbrace{=}_{\text{CI}} -A \quad \text{et} \quad \dot{z}(0) \underbrace{=}_{\text{sol}} \omega_0 \beta \underbrace{=}_{\text{CI}} 0$$

d'où finalement

$$\boxed{z(t) = -A \cos(\omega_0 t).}$$

Maintenant que z est connu, on peut (enfin !) en déduire l'expression de R tant qu'il y a contact (rappelons que tous les calculs ont été faits en supposant le contact). En appliquant la loi de la quantité de mouvement à la masse, nous avons montré que

$$R = m\ddot{z} + mg$$

et nous venons de calculer

$$\ddot{z} = -\frac{k}{m + m'}z = +\frac{kA}{m + m'}\cos(\omega_0 t)$$

d'où

$$\boxed{R = \frac{m}{m + m'}kA \cos(\omega_0 t) + mg.}$$

La valeur minimale que prend R doit toujours rester positive, sans quoi le cube décolle, donc le cube reste sur le plateau tant que

$$-\frac{m}{m + m'}kA + mg > 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{A < \frac{(m + m')g}{k}.}$$