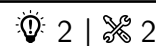




# Électronique

## Exercice 1 : Transitoire d'un circuit RC parallèle



▷ Transitoire du premier ordre.

### Correction des questions d'analyse du corrigé

**Question d'analyse 1** - La résistance  $R$  et le condensateur sont montés en parallèle, donc soumis à la même tension.

**Question d'analyse 2** - La maille considérée est la « grande maille », qui comporte le générateur, la résistance  $r$  et le condensateur ... mais pas la résistance  $R$ .

**Question d'analyse 3** - La fém du générateur est implicitement supposée constante, donc sa dérivée est nulle.

**Question d'analyse 4** - Déjà, cette expression devrait te faire sauter au plafond car elle est affreusement inhomogène ! L'erreur vient d'une mauvaise identification de la forme canonique : le préfacteur de la dérivée doit être égal à 1 pour que le préfacteur du terme non dérivé s'identifie à  $\tau$ .

**Question d'analyse 5** - Absolument pas, c'est juste une coïncidence de calcul. Les deux résistances  $r$  et  $R$  ne sont ni en série ni en parallèle.

**Question d'analyse 6** - Les seules grandeurs continues sont la tension aux bornes d'un condensateur et le courant qui traverse une bobine. Les autres tensions et les autres aux courants, dont  $i$ , peuvent être (et sont souvent) discontinus.

**Question d'analyse 7** - Même réponse que précédemment ... sauf que cette fois  $u_C$  EST continue, donc  $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$ .

**Question d'analyse 8** - La solution particulière est toujours cherchée de la même forme que le second membre, c'est-à-dire constant dans notre cas.

**Question d'analyse 9** -  $A = \frac{E}{r} - \frac{E}{r+R} = \left( \frac{r+R}{r(r+R)} - \frac{r}{r(r+R)} \right) E = \frac{r+R-r}{r(r+R)} E = \frac{R}{r(r+R)} E$ .

**Question d'analyse 10** - Après autant de calculs, vérifier que le résultat final que l'on encadre est bien compatible avec la condition initiale est toujours une bonne idée. Si ce n'est pas le cas ... c'est qu'il faut recommencer ☺

## Exercice 2 : Condensateur alimenté par deux générateurs

oral CCINP MP | 2 | 1



▷ Équation différentielle du premier ordre ;  
▷ Puissance électrique.

1] Raisonnons avec les notations de la figure 1 pour  $t > 0$ .

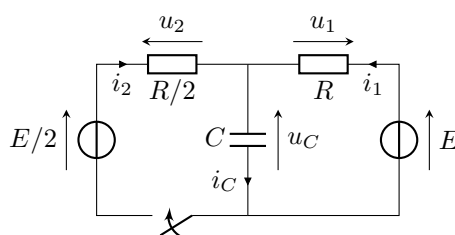


Figure 1 – Condensateur alimenté par deux générateurs.

Loi des nœuds :

$$i_C = i_1 + i_2$$

Lois de comportement :

$$C \frac{du_C}{dt} = \frac{2u_1}{R} + \frac{u_2}{R}$$

Loi des mailles :

$$C \frac{du_C}{dt} = 2 \frac{E/2 - u_C}{R} + \frac{E - u_C}{R}$$

Donc

$$C \frac{du_C}{dt} = \frac{2E}{R} - \frac{3}{R} u_C$$

Finalement :

$$\boxed{\frac{du_C}{dt} + \frac{3}{RC} u_C = \frac{2E}{RC}}$$

**2** Pour la résoudre, écrivons l'équation sous forme canonique en posant  $\tau = RC/3$ ,

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{\tau} u_C = \frac{2E}{RC}$$

**Forme générale des solutions :**

▷ Solution particulière : le forçage est constant donc la solution particulière aussi, donc en injectant dans l'équation différentielle

$$0 + \frac{3}{RC} u_p = \frac{2E}{RC} \quad \text{d'où} \quad u_p = \frac{2}{3} E.$$

▷ Solution homogène :  $u_h = A e^{-t/\tau}$ .

▷ Conclusion :

$$u_C(t) = A e^{-t/\tau} + \frac{2}{3} E.$$

**Condition initiale :** À l'instant  $t = 0^-$ , le régime est permanent continu et le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert. D'après la loi des nœuds,

$$i_1(0^-) + i_2(0^-) = i_C(0^-) \quad \text{soit} \quad i_1(0^-) + 0 = 0$$

La loi des mailles donne alors

$$u_C(0^-) + R i_1(0^-) = E \quad \text{d'où} \quad u_C(0^-) = E$$

Par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur, on déduit

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = E.$$

**Détermination de la constante d'intégration :**

$$u_C(0^+) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sol}}}{A} + \frac{2}{3} E = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{E} = E \quad \text{d'où} \quad A = \frac{E}{3}.$$

**Conclusion :**

$$\boxed{u_C(t) = \frac{E}{3} e^{-t/\tau} + \frac{2}{3} E}$$

**3** La tension  $u_C$  est décroissante. Ainsi, la valeur finale est atteinte à 1% près à l'instant  $t_1$  tel que

$$u_C(t_1) = \frac{101}{100} \times \frac{2}{3} E.$$

Cherchons  $t_1$  :

$$\frac{E}{3} e^{-t_1/\tau} + \frac{2}{3} E = \frac{101}{100} \times \frac{2}{3} E$$

donc

$$e^{-t_1/\tau} + 2 = 2 \times \frac{101}{100}$$

soit

$$e^{-t_1/\tau} = 0,02$$

d'où

$$\boxed{t_1 = -\tau \ln 0,02 = 3,9 \tau.}$$

Le fait de trouver ici environ  $4\tau$  n'est pas contradictoire avec le fait qu'il faille un temps  $5\tau$  pour réaliser 99 % du transitoire. On s'intéresse ici à la valeur finale, mais pas à l'amplitude de l'échelon de tension. La condition initiale fait qu'on atteint la valeur finale à 1 % près avant d'avoir réalisé 99 % de l'échelon de tension.

4 L'énergie dissipée l'est par effet Joule dans les résistances. La puissance dissipée dans la résistance  $R$  vaut

$$\mathcal{P}_1 = \frac{u_1^2}{R} = \frac{(E - u_C)^2}{R} = \frac{E^2}{9R} \left( e^{-t/\tau} - 1 \right)^2.$$

De même, la puissance dissipée dans la résistance  $R/2$  vaut

$$\mathcal{P}_2 = \frac{u_2^2}{R/2} = 2 \frac{\left( \frac{E}{2} - u_C \right)^2}{R} = 2 \frac{E^2}{9R} \left( e^{-t/\tau} - \frac{1}{2} \right)^2.$$

La puissance totale dissipée vaut donc

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{diss}} &= \frac{E^2}{9R} \left( e^{-t/\tau} - 1 \right)^2 + 2 \frac{E^2}{9R} \left( e^{-t/\tau} - \frac{1}{2} \right)^2 \\ &= \frac{E^2}{9R} \left[ \left( e^{-2t/\tau} - 2e^{-t/\tau} + 1 \right) + 2 \left( e^{-2t/\tau} - e^{-t/\tau} + \frac{1}{4} \right) \right] \\ \mathcal{P}_{\text{diss}} &= \frac{E^2}{9R} \left[ 3e^{-2t/\tau} - 4e^{-t/\tau} + \frac{3}{2} \right]. \end{aligned}$$

Lorsque  $t \rightarrow \infty$ , la puissance dissipée tend vers

$$\mathcal{P}_\infty = \frac{E^2}{9R} \times \frac{3}{2} = \frac{E^2}{6R}.$$

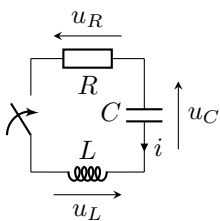
Cette valeur correspond à la puissance dissipée par une résistance  $3R/2$  alimentée par une tension  $E/2$ . Cette valeur est logique : en régime continu, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert, si bien que les autres dipôles apparaissent montés en série. Les deux générateurs s'associent alors en un seul de fém  $E/2$  (attention au sens) et les deux résistances sont équivalentes à  $3R/2$ .

### Exercice 3 : RLC série en régime libre

oral CCINP PSI | 💡 1 | ✂ 2



- ▷ Équation différentielle du second ordre ;
- ▷ Montage expérimental.



Les notations des courants et tensions ne sont pas explicitées sur le schéma par l'énoncé, auquel cas il est sous-entendu que toutes les tensions sont orientées de façon cohérente avec  $u_C$  et que les dipôles sont orientés en convention récepteur.

1 L'intensité  $i$  est continue car elle traverse une bobine. Ainsi,

$$i(0^+) = i(0^-) = 0$$

car le circuit est ouvert à  $t < 0$ . De même, la tension  $u_C$  est nécessairement continue car aux bornes du condensateur donc

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = U_0$$

Enfin, la tension aux bornes de la bobine se déduit de la loi des mailles à l'instant  $t = 0^+$  et de la loi d'Ohm,

$$u_R(0^+) + u_C(0^+) + u_L(0^+) = 0 \quad \text{d'où} \quad u_L(0^+) = -u_C(0^+) = -U_0.$$

En régime permanent, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert donc

$$i_\infty = 0.$$

La bobine est équivalente à un fil, si bien que

$$u_{L,\infty} = 0$$

et d'après la loi des mailles on en déduit

$$u_{R,\infty} + u_{C,\infty} + u_{L,\infty} = 0 \quad \text{d'où} \quad u_{C,\infty} = 0.$$

**2** D'après le comportement à  $t = 0$ , on en déduit que **la grandeur  $y$  correspond à l'intensité  $i$** . Un oscilloscope ne peut pas mesurer directement une intensité, il faut donc mesurer une tension qui lui est proportionnelle, c'est-à-dire la tension aux bornes de la résistance. Obtenir la courbe représentant  $y$  en fonction de  $t$  demande donc **de brancher l'oscilloscope en parallèle de la résistance**.

| Ici, il n'y a aucun appareil branché sur le secteur type GBF, donc pas de conflit de masse à craindre.

**3** D'après la loi des mailles,

$$u_R + u_C + u_L = 0 \quad \text{soit} \quad Ri + u_C + L \frac{di}{dt} = 0$$

en utilisant les lois de comportement. Pour pouvoir relier  $u_C$  à  $i$ , il est nécessaire dériver,

$$R \frac{di}{dt} + \frac{du_C}{dt} + L \frac{d^2i}{dt^2} = 0 \quad \text{d'où} \quad R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i + L \frac{d^2i}{dt^2} = 0.$$

Écrivons maintenant cette équation sous forme canonique pour faire apparaître les paramètres cherchés,

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0.$$

On identifie alors  $1/LC = \omega_0^2$  et  $R/L = 2m\omega_0$  d'où

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 2m\omega_0 \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0.$$

**4** **Forme générale des solutions** : L'équation différentielle est homogène, il n'y a donc pas de solution particulière à déterminer (une autre formulation possible est de dire qu'elle est nulle). Pour déterminer la forme générale de la solution homogène, trouvons les racines du polynôme caractéristique,

$$r^2 + 2m\omega_0 r + \omega_0^2 = 0.$$

Son discriminant vaut

$$4m^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2(m^2 - 1) < 0$$

car  $m < 1$ . Ainsi, les racines sont complexes conjuguées et valent

$$r_{\pm} = -\frac{2m\omega_0}{2} \pm i \frac{\sqrt{4\omega_0^2(1-m^2)}}{2} = -m\omega_0 \pm i\omega_0\sqrt{1-m^2} = -m\omega_0 \pm i\Omega.$$

Comme le discriminant de l'équation caractéristique est négatif alors le régime est pseudo-périodique et les solutions s'écrivent toutes sous la forme

$$i(t) = [A \cos \Omega t + B \sin \Omega t] e^{-m\omega_0 t}$$

**Conditions initiales** : Déterminons maintenant les conditions initiales nécessaires pour trouver les constantes  $A$  et  $B$ . D'après la question 1,

$$i(0^+) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{di}{dt}(0^+) = \frac{1}{L} u_L(0^+) = -\frac{U_0}{L}.$$

**Constantes d'intégration** : Ainsi, la condition initiale sur  $i$  donne

$$i(0^+) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sol}}}{=} A \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{=} 0.$$

En considérant directement  $A = 0$  pour calculer la dérivée,

$$\frac{di}{dt} = B\Omega \cos(\Omega t) e^{-m\omega_0 t} - m\omega_0 B \sin(\Omega t) e^{-m\omega_0 t}$$

donc

$$\frac{di}{dt}(0^+) \underset{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{sol}}}{=} B\Omega \underset{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{CI}}}{=} -\frac{U_0}{L} \quad \text{d'où} \quad B = -\frac{U_0}{L\Omega}.$$

**Conclusion :**

$$i(t) = -\frac{U_0}{L\Omega} \sin(\Omega t) e^{-m\omega_0 t}.$$

L'intensité est pseudo-périodique, et  $\Omega$  est sa **pseudo-période**. On peut l'évaluer à partir de la pseudo-période  $T'$  lisible sur la courbe. Par exemple,  $T' = t_2 - t_1$  d'où

$$\Omega = \frac{2\pi}{t_2 - t_1}.$$

**5** Trouver la position des maxima n'est pas simple du tout à cause de l'amortissement exponentiel, qui complique beaucoup la recherche des zéros de la dérivée. Cependant, compte tenu de la courbe donnée, on peut faire l'approximation que la position des maxima est directement donnée par ceux du sinus car l'amortissement est faible. Ainsi, le  $k$ -ième maximum est atteint lorsque

$$\Omega t_k = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{soit} \quad t = \frac{3}{4}T' + (k-1)T'$$

avec  $k$  un entier.  $y_1$  et  $y_2$  correspondent aux deux premiers maxima, aux instants  $t_1 = 3T'/4$  et  $t_2 = 7T'/4$ . Ainsi,

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{e^{-7m\omega_0 T'/4}}{e^{-3m\omega_0 T'/4}} = e^{-m\omega_0 T'}$$

Pour aboutir à une relation encore plus simple (je ne sais pas ce qu'attendait l'examineur, qui l'aurait précisé au candidat au cours de l'oral), on peut supposer  $m \ll 1$ , auquel cas  $\Omega \sim \omega_0$  et donc  $T' \simeq 2\pi/\omega_0$ . Dans ce cas,

$$\frac{y_2}{y_1} \simeq e^{-2\pi m}.$$

#### Exercice 4 : Circuit RL à deux mailles

oral Mines-Télécom PSI | 💡 3 | ✂️ 2



- ▷ Équation différentielle du premier ordre;
- ▷ Recherche de condition initiale.

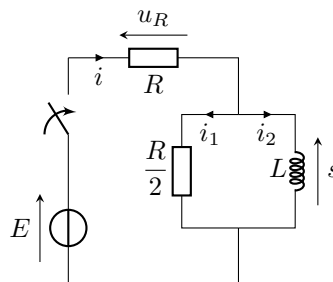


Figure 2 – Notations pour l'étude du circuit RL à deux mailles.

- Équation différentielle vérifiée par  $s$

▷ Première méthode : approche temporelle

Avec les notations de la figure 2,

Loi des nœuds :

$$i = i_1 + i_2$$

Dérivation :

$$\frac{di}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt}$$

Lois de comportement :

$$\frac{1}{R} \frac{du_R}{dt} = \frac{2}{R} \frac{ds}{dt} + \frac{s}{L}$$

Loi des mailles :

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dt} (E - s) = \frac{2}{R} \frac{ds}{dt} + \frac{s}{L}$$

$$-\frac{1}{R} \frac{ds}{dt} = \frac{2}{R} \frac{ds}{dt} + \frac{s}{L}$$

$$\frac{3}{R} \frac{ds}{dt} + \frac{s}{L} = 0$$

Finalement :

$$\boxed{\frac{ds}{dt} + \frac{R}{3L}s = 0}$$

ce que l'on peut mettre sous forme canonique :

$$\frac{ds}{dt} + \frac{1}{\tau}s = 0 \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{3L}{R}.$$

**Rappel de méthode :** Comme on veut utiliser la loi de comportement de la bobine, mais qu'elle implique une dérivée, alors on dérive l'équation de travail au préalable.

▷ Deuxième méthode : approche fréquentielle

L'association de la bobine et de la résistance  $R/2$  a pour admittance équivalente

$$\underline{Y}_{\text{éq}} = \frac{2}{R} + \frac{1}{jL\omega}.$$

On identifie alors un pont diviseur de tension entre cette admittance équivalente et la résistance  $R$ ,

$$\frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{\underline{Z}_{\text{éq}}}{\underline{Z}_{\text{éq}} + R} = \frac{1}{1 + R\underline{Y}_{\text{éq}}}$$

d'où on déduit

$$\left(1 + R\underline{Y}_{\text{éq}}\right) \underline{S} = \underline{E} \quad \text{soit} \quad 3\underline{S} + \frac{R}{jL\omega} \underline{S} = \underline{E}.$$

Pour pouvoir identifier à une équation différentielle, il faut écrire cette relation sous forme d'un polynôme en  $j\omega$ ,

$$3j\omega \underline{S} + \frac{R}{L} \underline{S} = j\omega \underline{E} \quad \text{d'où} \quad 3 \frac{ds}{dt} + \frac{R}{L} s = \frac{de}{dt}.$$

Comme  $e = E = \text{cte}$  la dérivée est toujours nulle et on en déduit la forme canonique

$$\boxed{\frac{ds}{dt} + \frac{R}{3L}s = 0.}$$

**Moralité :** L'approche fréquentielle suivie de l'identification est souvent plus simple, mais il faut bien se rappeler simplifier  $e$  lorsqu'elle est constante.

### • Forme générale des solutions

L'équation est homogène, il n'y a donc pas de solution particulière (ou autrement dit cette solution est nulle). Seule reste la solution homogène, donc

$$s(t) = A e^{-t/\tau},$$

avec  $A$  une constante.

### • Détermination de la condition initiale

▷ Étude à l'instant  $t = 0^-$  : la seule grandeur continue est  $i_2$  (courant dans une bobine), il n'y a donc qu'elle qu'on détermine. Comme le régime est permanent continu et que la branche contenant le seul générateur du circuit est ouverte, on a directement

$$i_2(0^-) = 0.$$

▷ Étude à l'instant  $t = 0^+$  :

Loi des nœuds :  $i(0^+) = i_1(0^+) + i_2(0^+)$

Continuité de  $i_2$  :  $i(0^+) = i_1(0^+)$

Lois de comportement :  $\frac{u_R(0^+)}{R} = \frac{2s(0^+)}{R}$

Loi des mailles :  $\frac{E - s(0^+)}{R} = \frac{2s(0^+)}{R}$

Donc :  $E = 3s(0^+)$

Finalement :  $s(0^+) = \frac{E}{3}$ .

**Rappel de méthode :** Il est **absolument inutile** de déterminer à  $t = 0^-$  une grandeur qui n'est pas continue, et ce même si c'est la grandeur d'intérêt. Comme elle n'est pas continue, sa valeur à  $0^-$  ne nous renseigne **pas du tout** sur sa valeur à  $0^+$ . Ainsi, les seules grandeurs à déterminer à  $0^-$  sont les grandeurs continues : tension aux bornes d'un condensateur et courant dans une bobine.

Rappelons également il n'y a pas de méthode fréquentielle pour déterminer une condition initiale!

### • Détermination de la constante $A$

$$s(0^+) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{\frac{E}{3}} = A \quad \text{donc} \quad A = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sol}}}{\frac{E}{3}}.$$

### • Conclusion

$$s(t) = \frac{E}{3} e^{-t/\tau}.$$

La courbe est représentée figure 3.

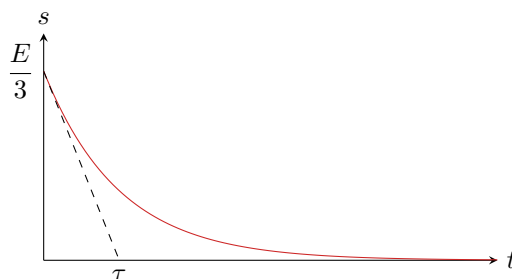


Figure 3 – Courbe représentant la tension  $s$  en fonction du temps.

## Exercice 5 : Ponts de mesure

inspiré oraux banque PT | 💡 2 | ✂ 2 | ⊗



▷ Impédances complexes ;  
▷ Loi des mailles.

**1** Compte tenu de la position de la masse, le potentiel  $V_A$  s'identifie à la tension aux bornes du dipôle  $Z_1$ . Or les dipôles 1 et 2 sont montés en série, ce qui permet d'utiliser un pont diviseur de tension :

$$\frac{V_A}{E} = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \quad \text{soit} \quad V_A = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} E.$$

De même,

$$V_B = \frac{Z_3}{Z_3 + Z_4} E.$$

2 La tension  $u$  est nulle lorsque les nœuds  $A$  et  $B$  sont au même potentiel, d'où

$$\frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} E = \frac{Z_3}{Z_3 + Z_4} E \quad \text{soit} \quad \underline{Z_1}(Z_3 + Z_4) = \underline{Z_3}(Z_1 + Z_2) \quad \text{donc} \quad \cancel{Z_1 Z_3} + \underline{Z_1} Z_4 = \cancel{Z_3 Z_1} + \underline{Z_2} Z_3$$

ce qui donne comme condition d'équilibre

$$\underline{Z_1} Z_4 = \underline{Z_2} Z_3.$$

3 L'impédance 1 de la bobine étudiée s'écrit simplement

$$\underline{Z_1} = r + jL\omega.$$

Pour l'impédance 4, le plus simple est de passer d'abord par l'admittance

$$\underline{Y_4} = \frac{1}{R} + jC\omega = \frac{1 + jRC\omega}{R} \quad \text{d'où} \quad \underline{Z_4} = \frac{R}{1 + jRC\omega}.$$

4 D'après la condition d'équilibre,

$$(r + jL\omega) \times \frac{R}{1 + jRC\omega} = R_2 R_3 \quad \text{soit} \quad rR + jRL\omega = R_2 R_3 + jR_2 R_3 RC\omega.$$

En identifiant les parties réelle et imaginaire, on en déduit

$$r = \frac{R_2 R_3}{R} \quad \text{et} \quad L = R_2 R_3 C.$$

## Exercice 6 : Résonance en tension d'un circuit RLC

💡 2 | ✂ 2 | Ⓜ



▷ Impédances complexes ;  
▷ Résonance.

### Correction des questions d'analyse du corrigé

**Question d'analyse 1** - L'identification se fait par rapport aux puissances de  $\omega$ .

$$\text{Question d'analyse 2} - Q = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{\sqrt{LC}}{RC} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

**Question d'analyse 3** - Le module d'un nombre complexe  $z = a + jb$  vaut  $|z| = a^2 + b^2$ , avec ici la partie réelle

$$a = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}.$$

**Question d'analyse 4** - L'imaginaire pur  $j$  ne fait pas partie de la partie imaginaire ! Donc pas de  $j^2 = -1$  ...

**Question d'analyse 5** - Il s'agit de la dérivation d'une composée de la forme  $u(X)^2$ , dont la dérivée vaut  $2u(X)u'(X)$ , avec ici  $u'(X) = -1$ .

**Question d'analyse 6** -  $X$  est le carré du rapport de deux pulsations. Trouver  $X_{\text{res}} < 0$  serait certes correct mathématiquement, mais ne permet pas de remonter à la grandeur physiquement intéressante, à savoir la pulsation.

## Exercice 7 : Circuit RLC série forcé en courant

💡 2 | ✂ 2



▷ Impédances complexes ;  
▷ Résonance.

1 La tension  $\underline{U}$  est reliée au courant  $\underline{I}$  par l'intermédiaire de l'impédance complexe de l'association RLC série,  $\underline{U} = \underline{Z} \underline{I}$ . Cette impédance s'écrit simplement

$$\underline{Z} = \underline{Z_R} + \underline{Z_L} + \underline{Z_C} = R + jL\omega - \frac{1}{jC\omega}.$$



En factorisant,

$$\underline{Z} = R \left[ 1 + \frac{jL\omega}{R} + \frac{1}{jRC\omega} \right].$$

Par identification selon  $\omega$  avec la forme donnée par l'énoncé,

$$\frac{jL\omega}{R} = \frac{jQ\omega}{\omega_0} \quad \text{et} \quad \frac{1}{jRC\omega} = -\frac{jQ\omega_0}{\omega} = \frac{Q\omega_0}{j\omega}.$$

On en déduit

$$\frac{Q}{\omega_0} = \frac{L}{R} \quad \text{et} \quad Q\omega_0 = \frac{1}{RC}.$$

On en déduit par substitution

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

**2** On a

$$\frac{U_m}{I_m} = |\underline{Z}| = R \sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}.$$

Dans les deux limites  $\omega \rightarrow 0$  et  $\omega \rightarrow \infty$ , l'amplitude  $U_m$  diverge. Ainsi, elle ne passe (probablement) pas par un maximum entre ces deux limites. En revanche, la parenthèse contient une différence, qui peut s'annuler. La parenthèse étant mise au carré, 0 est évidemment sa valeur minimale, atteinte lorsque

$$\omega = \omega_a = \omega_0.$$

Ce minimum existe toujours : **l'existence de l'anti-résonance ne dépend pas du facteur de qualité.**

Pour  $\omega = \omega_a$ , l'impédance complexe du circuit est réelle positive :  $\underline{Z} = R$ . Le déphasage entre  $u$  et  $i$ , égal à  $\arg \underline{Z}$ , est donc nul.

**3** D'après la question précédente,

$$|\underline{U}| = R \sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2} I_m$$

Cherchons les pulsations limites.

$$\begin{aligned} |\underline{U}(\omega_{1,2})| &= \sqrt{2} |\underline{U}(\omega_a)| \\ R \sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{\omega_{1,2}}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_{1,2}} \right)^2} I_m &= \sqrt{2} R I_m \\ 1 + Q^2 \left( \frac{\omega_{1,2}}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_{1,2}} \right)^2 &= 2 \\ Q \left( \frac{\omega_{1,2}}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_{1,2}} \right) &= \pm 1 \end{aligned}$$

Pour faciliter l'écriture, on pose  $x = \omega_{1,2}/\omega_0$ . On cherche donc à résoudre

$$Q \left( x - \frac{1}{x} \right) = \pm 1$$

ou encore

$$x - \frac{1}{x} = \pm \frac{1}{Q}$$

Les deux valeurs de  $x$  solutions de cette équation donnent les deux pulsations limite. Comme toujours, il faut transformer cette équation fractionnaire en équation polynômiale,

$$x^2 \pm \frac{x}{Q} - 1 = 0$$

Cette équation a un discriminant

$$\Delta = \frac{1}{Q^2} + 4 > 0.$$

On trouve alors quatre solutions mathématiquement possibles pour les pulsations réduites  $x$

$$x_{\pm} = \pm \frac{1}{2Q} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$$

mais seules deux sont physiquement acceptables car  $x > 0$ . Comme  $\sqrt{\Delta} = \sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4} < \frac{1}{Q}$  alors ces deux solutions sont

$$x_{\pm} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \pm \frac{1}{2Q} \quad \text{d'où} \quad \omega_{1,2} = \omega_0 x_{\pm}$$

et on en déduit finalement

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{2Q} - \frac{-\omega_0}{2Q} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}}$$

**4** Estimer la fréquence propre est beaucoup plus précis à partir de la courbe de phase que de la courbe d'amplitude, puisque d'après la question 2, il suffit de repérer la fréquence pour laquelle  $\varphi = 0$ . On lit alors

$$\boxed{f_0 = 1,8 \text{ kHz}}$$

Pour déterminer le facteur de qualité, on estime la largeur en fréquence de la résonance à partir de la courbe d'amplitude : par définition,  $U_m/I_m = |Z|$ . À l'anti-résonance, on lit graphiquement  $U_m/I_m = 5 \cdot 10^2 \Omega$ , donc  $f_1$  et  $f_2$  sont les fréquences telles que  $U_m/I_m = \sqrt{2} \times 5 \cdot 10^2 \Omega = 7 \cdot 10^2 \Omega$ . On lit sur la figure

$$f_1 = 1,3 \text{ kHz} \quad \text{et} \quad f_2 = 2,5 \text{ kHz}$$

On en déduit

$$\boxed{Q = \frac{\omega_a}{\Delta\omega} = \frac{f_a}{\Delta f} = 1,5}$$